EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

48e jaargang
1972/1973
no 4
december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-130785.
Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 200,—, $^1/_2$ pag. *f* 110,— en $^1/_4$ pag. *f* 60,—.

Meetkunde met vectoren IV[1]
(enkele voorbeelden; evenwijdigheid)

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

De vorige keer zal ik menig lezer boos gemaakt hebben met mijn formalistische afleiding van de vergelijking van een vlak. Ik voel, dat ik iets goed te maken heb. Ik wil nu een paar voorbeelden geven van oplossingen, waarin door woordgebruik vermeden is, dat de formalismen te zwaarwichtig worden.
Opgave. Snijd (d.w.z. vind de verzameling van de gemeenschappelijke punten van)

de lijn met p.v. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

en het vlak V $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3.$

Oplossing. Gevraagd wordt de verzameling van de waarden van λ, waarvoor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ligt in } x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3.$$

Nu is

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ligt in } x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1 - \lambda) + 2(1 + 2\lambda) - 3\lambda = 3 \Leftrightarrow 0\lambda = 0$$

De gevraagde verzameling bestaat dus uit $\mathbb{R}$. Anders geformuleerd: elk punt van de lijn l ligt in V.
Dit is toch precies. Op de ekwivalentie is gelet. Door weglating van de verzamelingnotatie zijn gecompliceerde formalismen vermeden.

[1] De vorige artikelen vindt men in Euclides 48, 1, 2 en 3 (de eerste drie nummers van deze jaargang).

Opgave. Gegeven is de rechte lijn l

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Gevraagd de parametervoorstelling van deze lijn.

Oplossing

$$\left.\begin{array}{r} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 3x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases}$$

We vinden alle punten van de lijn dus door voor x_3 een willekeurig getal te kiezen en daarna de bijbehorende x_1 en x_2 uit te rekenen. Noem dit getal λ. We krijgen dan

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 3\lambda \\ x_2 &= 1 - \lambda \\ x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

De parametervoorstelling van de lijn is dus

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Correct en niet te gecompliceerd. Formeel juister, maar minder gemakkelijk voor onze leerlingen zou zijn:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 + 3x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \exists\lambda: \begin{cases} x_1 = 1 + 3\lambda \\ x_2 = 1 - \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

Opgave. Onderzoek of de volgende twee lijnen één punt gemeen hebben:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing. De lijnen hebben een punt gemeen is gelijkwaardig met

$$\exists\lambda,\mu: \left\{\begin{array}{l} 3 + \lambda = 5 - \mu \\ 1 + 2\lambda = 3\mu \\ -3\lambda = 1 + \mu \end{array}\right\} \Leftrightarrow \exists\lambda,\mu: \left\{\begin{array}{l} \mu = 2 - \lambda \\ 1 + 2\lambda = 6 - 3\lambda \\ -3\lambda = 3 - \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\exists \lambda, \mu: \begin{cases} \mu = 2 - \lambda \\ 5\lambda = 5 \\ 2\lambda = -3 \end{cases}$$

Deze laatste bewering is onwaar; een dergelijk stel waarden voor λ en μ bestaat niet. En dus hebben de lijnen geen punt gemeen.
Ook dit voorbeeld is dunkt me vrij eenvoudig. Ik kan mij begrijpen, dat menig leraar, die het vraagstuk op het bord voormaakt, de existentiekwantor weglaat. D.w.z. hij laat hem niet weg, maar hij zegt: de lijnen snijden elkaar – wil zeggen, dat er waarden voor λ en μ zijn zo, dat enz. D.w.z. hij laat de kwantoren niet weg, maar hij praat ze weg. En wat doet de leerling nu, die zelf de som op schrift maakt, hetzij als huiswerk hetzij op proefwerk of op examen: hij laat de kwantoren weg. En dan is zijn redenering fout.

Theorie van de evenwijdigheid. Het is mogelijk door geschikte definities een snelle theorie van de evenwijdigheid te geven.

Definitie. Onder de richting van de lijn met p.v. $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$ verstaan we de lijn met p.v. $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{w}$.

Definitie. Onder het richtingsvlak van het vlak met p.v. $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{u}$ verstaan we het vlak met p.v. $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{u}$.

Definitie. Twee lijnen heten evenwijdig als ze dezelfde richting hebben.

Definitie. Twee vlakken heten evenwijdig als ze hetzelfde richtingsvlak hebben.

Definitie. Een lijn l heet evenwijdig aan een vlak V als de richting van l deel is van het richtingsvlak van V.

De gewone stellingen over evenwijdigheid zijn nu in een ommezien bewezen. B.v.

Stelling. Door een punt P gaat precies één lijn evenwijdig aan lijn l.
Bewijs. Onderstel, dat de p.v. van l is

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}.$$

De enige lijn, die aan de vraag voldoet, is dan

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{w}.$$

Stelling. Als (in de ruimte) twee lijnen evenwijdig zijn aan een derde, dan zijn ze evenwijdig aan elkaar. (Anders gezegd: de relatie van de verzameling van de lijnen naar zichzelf 'is evenwijdig' is transitief.)
Bewijs. Volgt direct uit de definitie. (En wat ging dat vroeger moeizaam.)

Stelling. Als twee evenwijdige vlakken V en W gesneden worden door een vlak U, dan zijn de snijlijnen evenwijdig.

Bewijs. De richting van $V \cap U$ is de snijlijn van de richtingsvlakken van V en U.

De richting van $W \cap U$ is de snijlijn van hun richtingsvlakken. Wegens $V \,//\, W$ vallen deze twee richtingen samen.

Men ziet gemakkelijk in, dat

$$V // W \;\Leftrightarrow\; V = W \vee V \cap W = \phi \tag{1}$$

$l \,//\, m \;\Leftrightarrow\;$ er is een vlak waarvan l en m deel zijn $\vee\ (l = m \vee l \cap m = \phi)$

$$l \,//\, V \;\Leftrightarrow\; l \subset V \vee l \cap V = \phi$$

Uit (1) volgt: het richtingsvlak van het vlak

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4$$

is het vlak

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

En daaruit volgt weer, dat de richting van de lijn

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_4 \end{cases}$$

is de lijn

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases}$$

Ik laat in het midden, hoeveel stellingen over evenwijdigheid men wil aantonen. Ik zou er de voorkeur aan geven er niet een cultuur van te maken. De stellingen over evenwijdigheid spelen in de vectormeetkunde een aanmerkelijk minder belangrijke rol dan vroeger in de stereometrie.

Differentiaal-calculus

PROF. DR. J. VAN TIEL.
Utrecht

Wie zich ooit in zijn analyse–onderwijs op het terrein der differentialen heeft begeven weet van hoeveel voetangels en klemmen dit voorzien is. Nu, als gevolg van de invoering van het leerplan wiskunde I, het betreden van dit terrein voor iedere docent bij het V.W.O. een noodzaak wordt kan het nuttig zijn indien docenten bij V.W.O. en W.O. hierover eens wat van gedachten wisselen en elkaar mededeling doen van hun onderwijservaring op dit punt. Het onderstaande beoogt een inleiding tot zo'n gedachtenwisseling te zijn; ik heb het geschreven vanuit mijn ervaring in het analyse–onderwijs aan aanstaande fysici.

Een duistere zaak
Het begrip 'differentiaal' is in veel elementaire analyse-boeken in nevelen gehuld. Opvallend is hoe in die boeken een min of meer exacte (van het gestelde doel afhankelijke) betoogtrant bij de invoering van dit begrip wordt onderbroken, om plaats te maken voor een beschouwing van geheel andere aard die niet minder exact, maar erger: onbegrijpelijk, is. Ik geef u twee voorbeelden van zo'n invoering:

A Zij h een willekeurig getal; h noemt men wel een *'toename'* van x ($h > 0$ òf $h < 0$) en wordt wel voorgesteld door Δx. Deze willekeurige 'toename' Δx heet de *differentiaal* van x. Is de functie $y = f(x)$ differentieerbaar, dan is de *differentiaal* van y gedefinieerd door $f'(x)\Delta x$, en deze differentiaal wordt voorgesteld door dy; dus d$y = f'(x)\Delta x$. De differentiaal van de functie x is gelijk aan $1 \cdot \Delta x$, dus d$x = \Delta x$. Daarom schrijven we, als y een differentieerbare functie van x voorstelt: d$y = f'(x)$dx.

Het bedrog is duidelijk: òf dy is een willekeurig getal, maar dan is het duister waarom dit met zo'n bijzonder symbool dy wordt aangegeven, terwijl het dan onjuist is te spreken van 'de' differentiaal; òf dy is een functie, namelijk van x en Δx, maar dan is een notatie als d$y(x, \Delta x)$ op zijn plaats en blijft er weinig over van de redenering die leidt tot de uitspraak d$x = \Delta x$.

B Indien wij in het midden laten bij een substitutie $x = \phi(t)$, van welke aard de functie is, dan zullen wij t een 'obscure' parameter noemen, en wel obscuur omdat de aard van ϕ verborgen blijft. Een differentiatie van de functie f naar een obscure parameter zullen wij een *differentiaal* noemen, en voorstellen door df.

Bij het lezen hiervan krijgt men de neiging van een obscure differentiaal en zeker van een obscure definitie te spreken!

Differentiaalvrije wiskunde

Voor een verklaring van het voorkomen van beschouwingen als bovenstaande in overigens zeer serieuze boeken is een korte bezinning op de herkomst en het gebruik van differentialen nuttig.

Door Leibniz en zijn epigonen werd de differentiaalrekening ontwikkeld met behulp van een taal die we thans, gezien de huidige eisen die wij stellen aan een 'theorie', een 'definitie', een 'bewijs', met de beste wil van de wereld niet meer als wiskundig zinvol kunnen beschouwen: het is de taal der differentialen, dat zijn oneindig kleine grootheden. Uiteraard doet deze constatering niet af aan de wiskundige verdiensten van Leibniz c.s.; het is trouwens waarschijnlijk alleen de wiskundig waarlijk groten gegeven om met een gebrekkige taal grootse resultaten te bereiken. Volledige klaarheid ten aanzien van deze resultaten werd echter pas bereikt in de differentiaalrekening zoals wij die nu kennen; deze is ontstaan dankzij een systematisch gebruik van begrippen als 'functie', 'limiet' en 'afgeleide', dat het gebruik van differentialen overbodig maakt.

Men zou verwachten in de huidige wiskunde geen differentialen meer aan te treffen, en in wezen is dat ook het geval. Wel leven ze in sommige notaties voort; deze notaties zouden echter zonder veel moeite door andere, geen differentialen bevattende, kunnen worden vervangen. Om redenen van traditie of van rekentechnische aard worden ze in stand gehouden; velen valt het nu eenmaal gemakkelijker te werken met een formule als

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad x = \phi(t)$$

dan met de hiermee equivalente formule

$$\mathrm{D}^{-1}f = \{\mathrm{D}^{-1}\,[\,(f\circ\phi)\cdot\phi'\,]\,\}\circ\phi^{-1}$$

(waarin D^{-1} de operator 'primitiveren' en ϕ^{-1} de inverse van ϕ is).

Weliswaar kent de differentiaalmeetkunde differentialen en differentiaalvormen, maar deze stemmen slechts in naam overeen met de eerder genoemde oneindig kleine grootheden. Enkele voorbeelden: is f een differentieerbare functie $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en is $a\in\mathbb{R}$, dan verstaat men onder de differentiaal d$f(a)$ van f in a de lineaire afbeelding $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\mathrm{d}f(a)h = f'(a)h \quad (h\in\mathbb{R})\,.$$

Geven we de identieke functie $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (die aan elke $b\in\mathbb{R}$ toevoegt b) aan met x, dan geldt voor alle $a, h\in\mathbb{R}$: $\mathrm{d}x(a)h = h$; er volgt dat

$$\mathrm{d}f(a)h = f'(a)\,\mathrm{d}x\,(a)h \quad (a, h\in\mathbb{R})$$

hetgeen ook wordt geschreven als

$$\mathrm{d}f = f'\,\mathrm{d}x\,.$$

Is f een differentieerbare functie $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en is $a \in \mathbb{R}^3$, dan verstaat men onder de differentiaal $\mathrm{d}f(a)$ van f in a de lineaire afbeelding $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\mathrm{d}f(a)h = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a)h_3 \quad (h \in \mathbb{R})$$

waarin $h = (h_1, h_2, h_3)$. Geven we met x, y, z aan de 'projecties' $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die aan elke $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ toevoegen resp. b_1, b_2, b_3, dan is

$$\mathrm{d}f(a)h = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{d}x(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,\mathrm{d}y(a)h + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\,\mathrm{d}z(a)h \quad (a, h \in \mathbb{R}^3)$$

hetgeen ook geschreven wordt als

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Déze differentialen vallen zeker buitèn het bestek van wiskunde I!

Differentialen in de natuurkunde

Met differentialen geeft men in de natuurkunde over het algemeen 'kleine grootheden' aan. Bijvoorbeeld: is $q(t)$ de op het tijdstip t aanwezige hoeveelheid van een radioactieve stof en is de hoeveelheid $-\mathrm{d}q$ die op het 'zeer dicht bij t gelegen' tijdstip $t + \mathrm{d}t$ is omgezet (afgebroken) recht evenredig met $q(t)$ en mèt $\mathrm{d}t$, dan geldt

$$-\mathrm{d}q = Cq(t)\,\mathrm{d}t$$

waarin C een constante is, dus

$$(*) \qquad q'(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -Cq(t).$$

Er volgt dat

$$q(t) = q_0\,\mathrm{e}^{-Ct}$$

waarin $q_0 = q(0)$.

Dit is duidelijk de taal van Leibniz: schrijft men Δq en Δt in plaats van resp. $\mathrm{d}q$ en $\mathrm{d}t$ (die weliswaar zeer kleine, maar toch 'eindige', grootheden voorstellen), dan komt er

$$(**) \qquad \frac{\Delta q}{\Delta t} = -Cq(t)$$

en in deze formule is het linkerlid niet gelijk aan $q'(t)$. Overgang op de formule $q'(t) = -Cq(t)$ kan plaatsvinden door in (**) de limiet voor $\Delta t \to 0$ te nemen, maar de essentie van Leibniz' taal (en daarmee van (*)) is dat daarin zo'n limietovergang niet nodig is: $\mathrm{d}q$ en $\mathrm{d}t$ zijn 'oneindig klein'.

Een interpretatie van (**) in onze huidige taal ligt voor de hand: voor kleine Δt zal $\Delta q/\Delta t$ weinig van $q'(t)$ verschillen, zodat de veronderstelling $q'(t) = -Cq(t)$ gerechtvaardigd lijkt. Ik kom op de (met opzet gebruikte) woorden 'veronderstelling' en 'gerechtvaardigd' hieronder terug; direct duidelijk is evenwel dat de differentialen dq en dt zonder enig bezwaar (en volgens sommigen zelfs: beter) door de symbolen Δq en Δt kunnen worden vervangen. Het is niet moeilijk om te concluderen dat ook de natuurwetenschappen gemakkelijk 'differentiaalvrij' te maken zijn.

Wiskunde als hulpwetenschap
In de natuurwetenschappen wordt niet altijd duidelijk onderscheid gemaakt tussen fysisch experiment enerzijds en mathematisch model anderzijds. Mede als gevolg hiervan hanteert men de wiskundige hulpapparatuur wel eens op een manier die (zowel wat betreft de vorm als de inhoud) afwijkt van de (thans) in de wiskunde gebruikelijke; hierboven gaf ik u hiervan een voorbeeld betreffende het toepassen van de differentiaalrekening. Ik meen dat het hier niet de plaats is in te gaan op de wenselijkheid of de noodzakelijkheid hiervan (in discussies hierover blijken de beste stuurlui vaak aan wal te staan); ik constateer slechts een - via het doorbladeren van wat op propaedeutisch niveau geschreven natuurkundeboeken gemakkelijk te verifiëren - feit waaraan voorlopig waarschijnlijk weinig zal veranderen. Het lijkt mij gewenst met dit feit in het wiskundeonderwijs uitdrukkelijk rekening te houden, zeker bij een onderdeel als wiskunde I, dat immers met het oog op de functie van de wiskunde als hulpwetenschap gedoceerd wordt. Ik merk daarbij op dat het voor vele wiskundigen verleidelijk is te peinzen over de vraag hoe de wiskunde als hulpwetenschap gehanteerd zou *moeten* worden; de meeste leerlingen vinden slechts baat bij het vernemen hoe dit nu gedaan *wordt*. Zolang de natuurwetenschappen differentialen gebruiken zullen we daaraan in ons wiskundeonderwijs aandacht moeten besteden; ik neem aan dat dit de reden is dat het onderwerp 'differentialen' in het leerplan wiskunde I is opgenomen.
Moge het ons al veel moeite kosten onze leerlingen een aantal wiskundige algoritmen te leren, hoeveel moeilijker is het niet ons met elkaar te verdiepen in het standpunt van de gebruiker. Maar ook: hoeveel lonender! Slaagt men er immers in zijn leerlingen begrip bij te brengen voor de wijze waarop men zich in andere wetenschappen beroept op redeneringen van wiskundige aard, dan brengt men hun, in de betrekkelijk rustige schoolperiode waarin ze wellicht meer dan ooit voor nieuwe denkwijzen ontvankelijk zijn, enig besef bij van de centrale plaats die de wiskunde in het huidige (natuur-) wetenschappelijk denken inneemt, en draagt men tevens een steentje bij tot verbetering van de verstandhouding tussen gebruikers van de wiskunde (volgens welke de wiskundigen te pietluttig zijn) en wiskundigen (die zeggen dat de anderen te slordig zijn).
Maar men verkope de leerlingen daarbij geen knollen voor citroenen: men bewijst ze bepaald geen dienst door bepaalde gebruiken te verklaren of goed te praten aan de hand van onhoudbare of niet steekhoudende, en daarmee in onze wiskunde niet thuishorende, redeneringen. Als voorbeelden liet ik u hierboven de behandelingen A en B van het begrip differentiaal zien. Een ander voorbeeld treft u aan in het boekje Analyse (2 delen) van drs. J. van Dormolen, het enige over de analyse voor het leerplan wiskunde I geschreven boek dat ik in handen kon krijgen. Differentialen zijn daar dingen die niet gedefinieerd worden, maar waarvan de verhouding wel gedefinieerd wordt; hoe onhoudbaar

deze gang van zaken is bewijst de schrijver zelf door onmiddellijk met differentialen te rekenen als waren het getallen. Deze opzet leunt duidelijk aan tegen het bovenbeschreven gebruik van differentialen in de differentiaalmeetkunde; woorden als 'kleine storing' en 'aangroeiing' verraden de invloed van Leibniz.

Het mathematisch model

Wellicht is het hier de plaats even stil te staan bij de rol van het mathematisch model; waarschijnlijk om historische redenen is namelijk het onderscheid tussen dit model en het experiment in de natuurwetenschappen soms wat minder duidelijk dan bijvoorbeeld in de economie.
We stellen ons hier tevreden met een wat slordige (maar voor ons doel toereikende) definitie van 'model': onder een mathematisch model van een (natuur-) gebeuren verstaan we een beschrijving van dit gebeuren binnen een wiskundige theorie. Direct moet worden opgemerkt dat de keuze van het model vaak een kwestie van smaak is en daarom een enorm twistpunt kan zijn; een mathematische theorie die volgens wiskundigen adequaat is voor het beschrijven van zekere fysische processen is dat daarom nog niet voor natuurkundigen. Hoewel men bij het opstellen van een model over het algemeen wel streeft naar eenvoud en bovendien eist dat het ten aanzien van het beschreven gebeuren voorspellende waarde heeft, kan men pas over de juistheid van een model spreken als men criteria voor die juistheid heeft aangegeven, en dat is vaak weer een kwestie van smaak; er bestaat niet zoiets als een 'waar' model (men vergelijke ook de klassieke met de relativistische mechanica). Men probere maar eens te 'bewijzen' dat de beweging van een trillende snaar wordt beschreven door de eendimensionale golfvergelijking! Ik meen dat we aan deze problematiek ook in het V.W.O. aandacht moeten besteden; de opgave, de differentiaalvergelijking van een vallende regendruppel op te stellen is in zekere zin een onmogelijke, over de juistheid van het antwoord valt te twisten, en wat we hierbij van de leerling eisen is van essentieel andere (wellicht zelfs niet wiskundige te noemen) aard dan het oplossen van die vergelijking.
Voor een wiskundige tellen eenvoud en ook élégance zwaar; is het model eenmaal aanvaard, dan wenst hij bovendien bij het gebruik hiervan binnen de gebruikte mathematische theorie te blijven. Een natuurkundige, zeker een van de experimentele richting, zal over het algemeen wat minder behoefte voelen aan fraaie theorieën en sterke mathematische fundamenten. Hij zal vooral streven naar gemakkelijke fysische interpreteerbaarheid van de gebruikte mathematische symbolen - het huidige mathematische apparaat staat wel eens ver af van de fysische intuïtie -; zo moge het waar zijn dat sommige discontinue processen (krachtstoot, puntlading) eenvoudig te beschrijven zijn m.b.v. distributies, een experimentator zal voorkeur hebben voor benaderingen met 'naaldfuncties'. Bovendien zal hij niet schromen zonodig 'van buitenaf' in het model in te grijpen en daarmee argumenten van fysische en mathematische aard met elkaar te mengen.
We bekijken een en ander nu wat concreter aan de hand van het bovenbesproken proces van radioactief verval. De hoeveelheid radioactieve stof

beschrijven we met behulp van een functie q van de tijd. Laat uit experimenten gebleken zijn dat voor een aantal waarden van t en (kleine) Δt de hoeveelheid radioactieve stof $q(t) - q(t + \Delta t)$ die tussen de tijdstippen t en $t + \Delta t$ wordt afgebroken (bij benadering) evenredig is met $q(t)$ en met Δt:

(1) $$q(t) - q(t + \Delta t) = Cq(t)\,\Delta t.$$

(1) is een mathematisch model van het beschouwde proces waarmee het moeilijk rekenen is. Men verkrijgt een eenvoudiger (en wel het gebruikelijke) model door aan te nemen dat (1) geldt voor *alle* Δt in een omgeving van 0: dan levert deling door Δt en limietovergang $\Delta t \to 0$ de differentiaalvergelijking

(2) $$q'(t) = -Cq(t)$$

op.

Men merke op dat de genoemde aanname niet zo reëel lijkt: men kieze het tijdsinterval Δt zo klein dat daarin geen enkel atoom uiteenvalt. Deze soort moeilijkheden komt bij het maken van modellen veel voor. Analoge gevallen: snelheden zijn nog nooit gemeten - wel gemiddelde snelheden $\Delta s/\Delta t$, eventueel met zeer kleine Δt. De mathematisch gedefinieerde soortelijke massa van een niet homogene stof is slechts te meten als $\Delta m/\Delta v$, waarbij men Δv liefst niet kleiner neme dan de afmetingen van een atoom; de limiet dm/dv bestaat in ons mathematisch model, maar de fysische interpretatie ervan is onduidelijk. De differentiaalrekening moge de fysicus eenvoudige en fraaie mathematische modellen verschaft hebben, de fysische interpretatie is soms moeilijker dan het lijkt.

Het gevonden model (2) is ook minder mooi dan het lijkt: met $q(0) = q_0$ volgt dat $q(t) = q_0 e^{-Ct}$, dus

$$q(t) - q(t + \Delta t) = q_0 e^{-Ct}(1 - e^{-C\Delta t}) = q(t)(1 - e^{-C\Delta t})$$

en de laatste uitdrukking is voor $\Delta t \neq 0$ ongelijk aan $Cq(t)\Delta t$; wegens $\lim_{x \to 0} (e^x - 1)/x = 1$ geldt wel dat hij voor kleine Δt "dicht bij" $Cq(t)\,\Delta t$ ligt.

In (2) komen de voor de experimenten zo belangrijke differenties Δq en Δt niet meer voor; men kan die weer te voorschijn toveren door $q'(t) = dq/dt$ te vervangen door $\Delta q/\Delta t$, waarbij men Δt zo klein veronderstelt dat deze vervanging gerechtvaardigd is. Dat is reëel: aangezien we niet met een willekeurige precisie kunnen waarnemen is er een Δt waarvoor het verschil $(dq/dt) - (\Delta q/\Delta t)$ niet meer waarneembaar is; men zou zo'n Δt een 'oneindig kleine grootheid' of 'differentiaal' kunnen noemen en daarmee het bovenstaande al aanzienlijk kunnen verhelderen. Ik stel u voor nog wat verder te gaan, en een mathematisch model te ontwerpen waarbinnen gepreciseerd wordt wat het betekent te zeggen dat een gemeten differentiequotiënt als goede benadering van een differentiaalquotiënt wordt beschouwd (waarbij we bij een kleine grootheid de orde van grootte aangeven), terwijl daarbij tevens expliciet vermeld wordt dat formules als (1) ook slechts bij benadering juist zijn (men denke aan de waarnemingsprecisie); het zal blijken dat de natuurkundige op elk moment zijn differenties (zij het wat vermomd) binnen het nieuwe model terugvindt.

Differentialen als modelmakers
Vooraf het volgende. Een uitdrukking als $x + x\sqrt{x} + x^2$ is voor zeer kleine x praktisch gelijk aan x. "praktisch" zowel ten opzichte van het rekenen met eindig veel decimalen als ten opzichte van het waarnemen (met eindige precisie); de "hogere orde-termen" $x\sqrt{x}$ en x^2 zijn dan te verwaarlozen ten opzichte van de eerste graads-term x. We merken op dat we de hogere orde-termen t kunnen karakteriseren door de eigenschap $\lim_{x\to 0} t/x = 0$.

Definitie 1 Laten F_1 en F_2 functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn. We schrijven

$$F_1(\Delta x) \approx F_2(\Delta x)$$

indien

$$\lim_{\Delta x \to 0} [F_1(\Delta x) - F_2(\Delta x)]/\Delta x = 0.$$

We zeggen dat in dit geval $F_1(\Delta x)$ en $F_2(\Delta x)$ op hogere orde-termen na gelijk zijn.

Definitie 2 Laten f en g functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn, en zij $x \in \mathbb{R}$; laten $F_1(\Delta f(x), \Delta g(x), \Delta x)$ en $F_2(\Delta f(x), \Delta g(x), \Delta x)$ uitdrukkingen zijn in $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x), \Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$ en Δx. We schrijven

$$F_1(\mathrm{d}f(x), \mathrm{d}g(x), \mathrm{d}x) = F_2(\mathrm{d}f(x), \mathrm{d}g(x), \mathrm{d}x)$$

indien voor de functies $G_i : \Delta x \to F_i(\Delta f(x), \Delta g(x), \Delta x)$ $(i = 1,2)$ geldt:

$$G_1(\Delta x) \approx G_2(\Delta x)$$

(zie definitie 1).

Opmerkingen
1 We noemen de symbolen $\mathrm{d}f(x)$, $\mathrm{d}g(x)$ en $\mathrm{d}x$ differentialen; deze symbolen zijn niet als mathematische objecten gedefinieerd, maar we hebben relaties gedefinieerd waarin ze voorkomen. Men vergelijke met het gebruik van het symbool $\mathrm{d}x$ in $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$.
2 Uitdrukkingen die differentialen bevatten noemen we dus gelijk indien de overeenkomstige differenties bevattende uitdrukkingen op hogere orde-termen na aan elkaar gelijk zijn.

Het aardige is nu dat men met differentiälen kan rekenen alsof het mathematische objecten zijn:

Stelling 1 Zijn f_1, f_2, f_3 functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, is $x \in \mathbb{R}$ en geldt $\mathrm{d}f_1(x) = \mathrm{d}f_2(x)$ en $\mathrm{d}f_2(x) = \mathrm{d}f_3(x)$, dan is $\mathrm{d}f_1(x) = \mathrm{d}f_3(x)$.

Bewijs:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f_1(x)-\Delta f_3(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f_1(x)-\Delta f_2(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f_2(x)-\Delta f_3(x)}{\Delta x} = 0 .$$

We spreken af (keuze van het model!) dat we differenties bevattende gelijkheden tussen fysische grootheden steeds interpreteren als gelijkheden op hogere orde-termen na. Zo interpreteren we de eerder gebruikte metingen in het proces van radioactief verval als

$$q(t) - q(t+\Delta t) \approx Cq(t)\,\Delta t$$

ofwel

(3) $\quad dq(t) = -Cq(t)\,dt .$

Stelling 2 Zij $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dan geldt:
$df(x) = \lambda dx \Leftrightarrow f'(x) = \lambda$.
Bewijs: $df(x) = \lambda dx$ is equivalent met

$$\lim_{\Delta x\to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \lambda \right] = 0 .$$

Gevolg Geldt voor alle x: $df(x) = 0$, dan is f constant (voor alle x geldt dan immers $f'(x) = 0$).

Stelling 3 Zij $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
a Is $\lambda df(x) = 0$, dan geldt $\lambda = 0$ of $f'(x) = 0$.
b $f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Bewijs:

a Is $\lambda \neq 0$, dan is $\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{\lambda} \lim_{\Delta x\to 0} \lambda \cdot \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0 .$

b $f(x)\,dx = 0$ is equivalent met $\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x)\,\Delta x}{\Delta x} = f(x) = 0 .$

Met stelling 2 volgt uit (3) dat

$$q'(t)\,dt = -Cq(t)\,dt$$

en volgens stelling 3 is dit equivalent met $q'(t) = -Cq(t)$. Is $q(0) = q_0$, dan volgt hieruit $q(t) = q_0 e^{-Ct}$. Omgekeerd vindt de experimentator het verband tussen $\Delta q(t)$ en Δt terug door te schrijven

$$dq(t) = d(q_0 e^{-Ct}) = -q_0 Ce^{-Ct}\,dt = -Cq(t)\,dt$$

ofwel $\Delta q(t) \approx -Cq(t)\,\Delta t$.
Men kan gemakkelijk zelf andere voorbeelden bedenken.

Het aardige van deze calculus met differentialen is m.i. dat hij wiskundig goed gefundeerd is, terwijl de experimentator bij zijn interpretatie van een differentiaal als een "zeer kleine" of "oneindig kleine" grootheid (in een van de eerder besproken betekenissen) niet in strijd komt met de wetten die in zijn mathematisch model gelden.
Naar behoefte leide men zelf andere regels van de differentiaalcalculus af, bijvoorbeeld: $\mathrm{d}[f^2(x)] = 2f(x)\,\mathrm{d}f(x)$ (voor differentieerbare f; in eenvoudiger notatie: $\mathrm{d}(y^2) = 2y\,\mathrm{d}y$).

Differentialen en differentiaalvergelijkingen
Ik heb boven al betoogd dat de analyse op propaedeutisch niveau geen behoefte heeft aan differentialen. Hoewel ik heb trachten aan te tonen dat differentialen een nuttige rol kunnen spelen bij het opstellen, op een door een practicus gemakkelijk te interpreteren wijze, van een differentiaalvergelijking (een mathematisch model), kunnen ze in de elementaire theorie der differentiaalvergelijkingen (dus bij het werken *binnen* het mathematisch model) gemist worden. Men bedenke wel dat men door louter te constateren dat de oplossingen van $yy' + x = 0$ gevonden kunnen worden door achtereenvolgens te schrijven

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x = 0\,,\quad y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x = 0\,,$$

$$\int y\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x,\ \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + C$$

het inzicht in het gebruik van differentialen (èn in het oplossen van differentiaalvergelijkingen) bepaald niet vergroot (de algoritme $\tfrac{1}{2}(y^2)' + x = 0$, $(y^2)' = -2x$, $y^2 = -x^2 + C$ doet het trouwens minstens even goed).
Aangezien vrijwel alle in het bovengenoemde V.W.O.-boekje Analyse behandelde differentiaalvergelijkingen zijn te herleiden tot lineaire eerste orde-vergelijkingen van het "scheiding der variabelen"-type, lijkt het gebruiken van differentialen hier overbodig. Wenst men dit toch te doen, dan raad ik het gebruik van de boven geschetste differentiaalcalculus aan: volgens stelling 3 is $yy' + x = 0$ equivalent met

$$yy'\,\mathrm{d}x + x\mathrm{d}x = 0$$

ofwel

$$y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x = 0;$$

men gaat met behulp van stelling 2 (met gevolg) nu verder via

$$\mathrm{d}(y^2 + x^2) = 0,$$
$$y^2 + x^2 = C.$$

Men ga in de praktijk na of deze methode een beter inzicht geeft of juist vertroebelend werkt ten aanzien van de specifieke moeilijkheden die optreden bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen met "in impliciete vorm gegeven"

oplossingen; enkele impliciete functiestelling-achtige opmerkingen zullen in geen van beide gevallen mogen ontbreken.
Tenslotte: zoekt men een oplossing van het type $x = x(t), y = y(t)$, dan is een schrijfwijze als $y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x = 0$ gemakkelijk te interpreteren: we zeggen nu dat aan de differentiaalvergelijking is voldaan indien

$$y(t)\,\mathrm{d}y(t) + x(t)\,\mathrm{d}x(t) = 0$$

dus

$$y(t)\,y'(t)\,\mathrm{d}t + x(t)\,x'(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

ofwel

$$y(t)\,y'(t) + x(t)\,x'(t) = 0\,.$$

In de praktijk is de parameter t vaak een der variabelen x en y, zodat men dan toch weer op een der eerder genoemde methoden terugvalt.

Nawoord
Het is niet mijn bedoeling V.W.O.-docenten te dicteren waarom en hoe zij in hun onderwijs met differentialen moeten omspringen; weliswaar heb ik het bovenstaande geschreven vanuit mijn ervaring met eerstejaars wis- en natuurkundestudenten, maar het ontbreekt mij aan V.W.O.-ervaring op dit gebied, en bruikbare methodiek en didaktiek ontstaan niet aan het bureau maar in de (klasse-) praktijk. Wel hoop ik een steentje te hebben bijgedragen tot een vruchtbare discusssie over een m.i. belangrijk onderwerp.

Eén jaar uit honderd, terugblik op het jaar 1872

Dr. JOH.H. WANSINK

Arnhem

1 Het lijkt me zinvol om in een tijdschrift gewijd aan de didactiek der wiskunde in 1972 stil te staan bij een paar wetenschappelijke publikaties die juist honderd jaar geleden zijn uitgekomen en die mede hun betekenis hebben voor de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in ons land. De bedoelde publikaties hebben zowel betrekking op de analyse als op de meetkunde.

2 FELIX KLEIN (1849-1926) werd in 1872 hoogleraar te Erlangen en hield er zijn inaugurele rede over het thema *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Deze rede zou onder de naam *Erlanger Programm* beroemd worden en van grote betekenis blijken voor komend meetkundig onderzoek.

Door uit te gaan van groepen van meetkundige transformaties werd door KLEIN in aansluiting bij ideeën van CAYLEY een ordening geschapen in diverse domeinen van meetkundig onderzoek. Elke transformatiegroep heeft zijn eigen meetkunde en in ieder van deze meetkunden onderzoekt men de eigenschappen die invariant zijn bij de beschouwde transformaties.

KLEIN ging uit van de groep der projectieve transformaties, waarbij tal van eigenschappen zoals de optredende dubbelverhoudingen, de incidenties, de rakingsrelatie invariant blijken bij opvolgende projecties. Vervolgens werden ondergroepen van de stamgroep beschouwd, zoals de affiene groep, waarin de evenwijdigheid van rechten, de binaire verhoudingen die de plaats van een punt op een rechte bepalen en de lengteverhoudingen op stelsels evenwijdige rechten behouden blijven. [1].

Van belang voor ons v.h.m.o. en v.w.o. zijn in het bijzonder de aequiforme groep (de gelijkvormigheidsgroep) en de groep der congruente transformaties. Bij de eerste blijken de hoeken constant van grootte, terwijl eveneens de verhouding van de lengten van lijnstukken invariant is. Hetzelfde geldt tenslotte bij de laatstgenoemde groep voor alle lengten en alle oppervlakten.

Ieder van de genoemde meetkunden (projectieve meetkunde, affiene meetkunde, aequiforme meetkunde, congruentiemeetkunde) is nu te beschouwen als een invariantietheorie van de desbetreffende groep. Overgang van de ene groep naar de andere brengt een andere meetkunde mee.

In de nu verstreken eeuw is de belangstelling voor de transformatiegroepen in ons onderwijs weliswaar gegroeid, maar voor de hiërarchie van de diverse meetkunden is uiteraard in het beginonderwijs moeilijk plaats in te ruimen. Daar staat tegenover dat er een onderwijs in analytische meetkunde denkbaar is waarin enige hoofdgedachten van het Erlanger Programm tot hun recht zouden kunnen komen. Zelfs de nieuwe behandeling van de gelijkvormigheid die vanaf 1900 geleidelijk aan een plaats in ons onderwijs kreeg betekende nog niet een volgen van de Kleinse ideeën. Bij deze methode beperkte men zich immers tot de vermenigvuldiging van een bepaalde figuur en was er geen sprake van een transformatie van het gehele vlak. Hierin zal in de komende decennia verandering kunnen komen doordat de groep van de congruente transformaties evenals die van de gelijkvormige transformaties door de herzieningen van 1968 een plaats in het leerplan hebben gekregen.
Een eeuw na de totstandkoming van het Erlanger Programm ontstaat dus de mogelijkheid dat er op den duur iets van de geest van dat programma in ons v.w.o. zal doordringen.
De eerste methode waarin de gelijkvormigheid gefundeerd werd op de homothetie is die van VAN DER HARST in zijn *Leerboek der Planimetrie* van 1897. Daarvoor had bijvoorbeeld KORTEWEG de methode reeds op zijn universitaire colleges besproken.
In het voorgaande hadden we alleen het oog op projectieve transformaties in het euclidische vlak. Maar we zouden uiteraard ook uit kunnen gaan van een andere stamgroep. Onze hiërarchie hangt dus af van het standpunt dat we innemen ten aanzien van het parallellenpostulaat. Deze kan ook gegeven worden voor een elliptische of hyperbolische meetkunde.
De mogelijkheid dat de niet-euclidische meetkunden in een nabije toekomst in ons v.w.o. aan de orde kunnen komen is door het systeem van de keuzevakken bij Wiskunde II geopend, althans in theorie.

3 Van fundamentele betekenis voor de aritmetisering van de wiskunde die in de afgelopen eeuw zijn beslag zou krijgen, zijn enige theorieën van het reële getal die in 1872 ongeveer gelijktijdig tot stand kwamen. Het zijn de theorieën van CANTOR, DEDEKIND en WEIERSTRASS, waarvan de eerste en de tweede in ons v.h.m.o. reeds een rol hebben gespeeld.
GEORG CANTOR (1845-1918; er is ook een MORITZ CANTOR aan wie we de vierdelige *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* te danken hebben) baseerde het reële getal op zogenaamde fundamentaalrijen van rationale getallen.
Een rij rationale getallen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \ldots$$

heet fundamentaalrij als er bij willekeurig gekozen positieve δ een rangnummer N te vinden is zó dat geldt:

$$(n > N) \wedge (m > N) \Rightarrow a_n - a_m \mid < \delta.$$

DEDEKIND voerde in zijn *Stetigkeit und rationale Zahlen* de zogenaamde sneden in. Dat zijn verdelingen van de verzameling Q van álle rationale getallen in twee deelverzamelingen Q_1 en Q_2, zo dat geldt:

$$(a \in Q_1) \wedge (b \in Q_2) \Rightarrow (a < b).$$

De theorie van WEIERSTRASS was reeds enige jaren eerder opgesteld, maar werd in 1872 gepubliceerd, door KOSSACK. In deze theorie wordt eveneens gebruik gemaakt van fundamentaalrijen, maar Weierstrass' definitie van reëel getal wijkt toch af van die van Cantor.
In beschouwingen over reële getallen van vóór 1872 werd er steeds gebruik gemaakt van meetkundige begrippen, met name van grootheden, in het bijzonder van de lengten van lijnstukken.

De theorieën van CANTOR en van DEDEKIND hebben op bescheiden wijze in de afgelopen eeuw hun plaats gevonden in ons v.h.m.o.; die van WEIERSTRASS niet en evenmin een vierde theorie uit dezelfde jaren die van Méray. [2] We wijzen er in dit verband op dat H.J.E. BETH in 1930 een uiteenzetting gaf over sneden van Dedekind in de *Nieuwe Schoolalgebra,* bestemd voor de B-leerlingen van gymnasium en h.b.s.
Voorts herinneren we eraan dat verschillende auteurs van schoolboeken gebruik hebben gemaakt van fundamentaalrijen, zij het in een gewijzigde formulering waarin teveel voorwaarden optreden. Doorgaans werd er namelijk uitgegaan van twee fundamentaalrijen $\{a_n\}$ en $\{A_n\}$, waarvan de eerste monotoon stijgend (althans niet dalend) werd gedacht en de tweede monotoon dalend. Deze rijen geven dan op de getallenrechte aanleiding tot de beschouwing van een nest van ineengedoosde intervallen, waarmee dan een zuiver aritmetisch opgestelde theorie aanschouwelijk, meetkundig, kan worden geïllustreerd.
We wijzen er echter uitdrukkelijk op, dat we voor een exacte definiëring van het reële getal met één enkele fundamentaalrij kunnen volstaan, en dat het beroep op de tweede rij alleen op didactische gronden verdedigbaar is.
In de theorieën van DEDEKIND en van CANTOR ging het er juist om meetkundige insluipsels te elimineren. Het feit, dat we bij de definiëring van reële getallen meetkundige beschouwingen geheel kunnen missen, is het fundament geweest voor de aritmetisering van de wiskunde die in de afgelopen eeuw zijn beslag heeft gekregen.

4 Enige opmerkingen tot slot.
a Schuh heeft in 1927 in *Het getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal* naast de theorieën van CANTOR, DEDEKIND en WEIERSTRASS ook nog die van de jong overleden Nederlander BAUDET (1891-1921) besproken. Schuh's behandeling is voor alle wiskundedocenten van betekenis, evenals de bespreking van de sneden van Dedekind die WIJDENES heeft opgenomen in zijn *Lagere Algebra, leerboek voor de acte wiskunde l.o. en voor inrichtingen van onderwijs met uitgebreid wiskunde-programma.*
b De vraag blijft over welke wijze van behandeling voor onze scholen aanbeveling verdient. We verwijzen allereerst naar een extreem standpunt ingenomen door WIJDENES. Deze schreef in 1923 bij commentaar over de behandeling van oppervlakten [3]:

'Verder negeer ik volkomen de onmeetbare verhoudingen, wat ieder moet toejuichen als een opluchting; het begrip onmeetbaar getal is geen stof voor onze h.b.s. en m.u.l.o.; . . . velen van de docenten zijn zelf niet geheel vertrouwd met het begrip. Geen leerling denkt eraan en voelt een leemte, als men erover zwijgt. Houdt a.u.b. de stof eenvoudig en binnen het bereik van de kinderen.' We wijzen er echter op, dat de behandeling van de sneden van Dedekind in *Nieuwe Schoolalgebra IV* waarnaar we reeds verwezen, is opgenomen in een leerboek waarvoor WIJDENES mede de verantwoordelijkheid als schrijver draagt.
Uit het citaat van WIJDENES komt duidelijk naar voren dat de invoering der reële getallen in ons onderwijs tot de controversiële didactische problemen behoort.
In verband met de wenselijkheid onze leerlingen in een zo vroeg mogelijk stadium met het begrip reëel getal vertrouwd te maken, verdient de invoering via oneindig voortlopende decimale breuken onze aandacht. Bij deze methode worden de begrippen reëel getal en decimale breuk geïdentificeerd. Treden er vanaf zekere decimaal louter nullen op of gaat er een bepaalde cijfergroep repeteren, dan hebben we te maken met een rationaal getal, zo niet dan met een irrationaal getal. Deze invoering van de reële getallen is eenvoudig van aard en ook eenvoudig met het oog op praktische toepassingen, bijvoorbeeld bij de invoering van de getallenrechte. De definities van de bewerkingen en het verifiëren van de eigenschappen geven echter extra bezwaren.
In een later stadium kan men dan desgewenst gemakkelijk de overgang tot stand brengen naar de fundamentaalrijen van Cantor, naar de sneden van Dedekind of naar de nesten van ineengedoosde intervallen.
Zie mijn *Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren* II, 1971², p. 195 en 196.

5 Lectuur:

[1] W.J. Brandenburg, *Modernisering van het wiskunde-onderwijs*, p. 15; Wolters, Groningen, 1968.
[2] Nicolas Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, p. 37; Hermann, Paris, 1960.
[3] P. Wijdenes, *Oplossingen van de vraagstukken uit de Beknopte Meetkunde*, p. 8; Noordhoff, Groningen, 1923.

De Eindexamens 1972 - III

Aan alle scholen voor avo was er dit jaar gelegenheid om een herexamen af te leggen. Voor het mavo werd daarbij gesproken van examens-tweede zitting.
Op verzoek van verschillende lezers drukken wij alle opgaven af: voor mavo-4, mavo-3, havo en vwo (ook die van experimenterende scholen).
Hiermee zijn dan alle voor de toekomst van belang zijnde examenopgaven van 1972 gebracht. Dat de mavo-opgaven-1e zitting niet werden opgenomen vindt zijn reden daarin dat ze aan alle scholen voor mavo werden toegezonden. De 1e zitting opgaven van de andere scholen zijn afgedrukt in de nummers juni/juli en aug/sept.

WISKUNDE I – MAVO 4 (2 UUR)

Bij elk van de volgende opgaven zijn vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters a, b, c en d. Eén van de antwoorden is juist. Teken een kringetje om de letter van het goede antwoord.

1 Een balk heeft ribben met lengten a, $2a$ en $3a$.
De totale oppervlakte van deze balk is

a $6a^2$ b $11a^2$ c $12a^2$ d $22a^2$

2 Van een functie f gedefinieerd door $f(x) = x^2 + 6x - 16$, zijn de nulwaarden

a -8 en -2 b -8 en 2 c 8 en -2 d 8 en 2

3 In een klas met meisjes en jongens is een proefwerk gemaakt.
Van de behaalde cijfers is onderstaande frequentietabel samengesteld.

cijfers	6	7	8	9
meisjes	4	2	1	3
jongens	1	4	6	5

De modus van de cijfers van de hele klas is

a 6 b 7 c 8 d 9

4 Het beeld van de grafiek van $x = 3$ bij een translatie, is de grafiek van $x = 6$. Deze translatie kan worden voorgesteld door

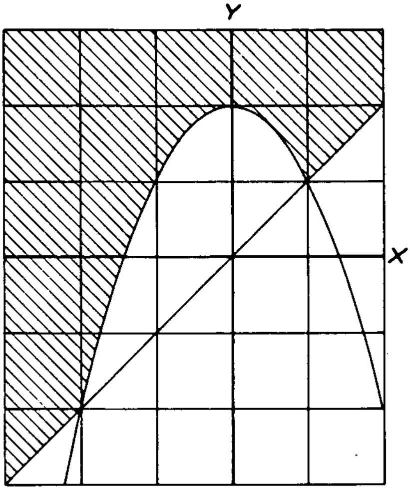
a $\binom{3}{0}$ b $\binom{0}{3}$ c $\binom{2}{0}$ d $\binom{0}{2}$

5 Bij een lineaire functie is 0 het beeld van 1 en is 1 het beeld van 0.
Deze functie is

a $x \to -x+1$ b $x \to -x-1$ c $x \to x+1$ d $x \to x-1$

6 In nevenstaand assenstelsel XOY zijn de grafieken van de relaties $y = x$ en $y = 2 - x^2$ voor een deel getekend.
Voor de punten (x, y) van het gearceerde gebied geldt

a $y \leqslant x$ en $y \leqslant 2 - x^2$ c $y \geqslant x$ en $y \leqslant 2 - x^2$
b $y \leqslant x$ en $y \geqslant 2 - x^2$ d $y \geqslant x$ en $y \geqslant 2 - x^2$



7 In een rechthoekige driehoek ABC is $\tan \alpha = 1\frac{3}{4}$.
Voor de grootte β van de andere scherpe hoek geldt

a $0^\circ < \beta < 30^\circ$ c $45^\circ < \beta < 60^\circ$
b $30^\circ < \beta < 45^\circ$ d $60^\circ < \beta < 90^\circ$

8 Van een functie $x \rightarrow x^2 + px + 4$ is -1 een origineel van 0.

a $p = -5$ c $p = 4$
b $p = -4$ d $p = 5$

9 De cirkel met middelpunt $(-1, -1)$ en straal 1 kan ontstaan uit de cirkel met middelpunt $(2, 2)$ en straal 2 door een vermenigvuldiging met

a factor -2 en centrum $(0, 0)$ c factor $-\frac{1}{2}$ en centrum $(0, 0)$
b factor -2 en centrum $(1, 1)$ d factor $-\frac{1}{2}$ en centrum $(1, 1)$

10 Van een functie $x \rightarrow 12x - \frac{1}{2}$ is $\mathbb{Z}$ het bereik.
Welke van onderstaande getallen kan een origineel zijn bij deze functie?

a $\frac{1}{24}$ b $\frac{1}{12}$ c $\frac{1}{6}$ d $\frac{2}{3}$

11 $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 > x \text{ of } 3 < x\}$ is gelijk aan

a $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ of } x < 3\}$ c $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \text{ of } x < 3\}$
b $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ of } x > 3\}$ d $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \text{ of } x > 3\}$

12 $\{(x, y) \mid 3x - 2y = 16\} \cap \{(x, y) \mid 2x + 5y = -2\} = \{(p, q)\}$.
Nu geldt voor p en q

a $p < 0$ en $q < 0$ c $p \geqslant 0$ en $q < 0$
b $p < 0$ en $q \geqslant 0$ d $p \geqslant 0$ en $q \geqslant 0$

13 AB is een middellijn van een cirkel met straal 2.
C is een punt van de cirkel zodanig dat $AC = 2$.
De oppervlakte van driehoek ABC is gelijk aan

a 2 b $2\sqrt{3}$ c 4 d $4\sqrt{3}$

14 De punten (x, y) waarvan de coördinaten voldoen aan

$y \leqslant \frac{1}{3}x - 1$ *en* $y \leqslant 3x + 1$

liggen in

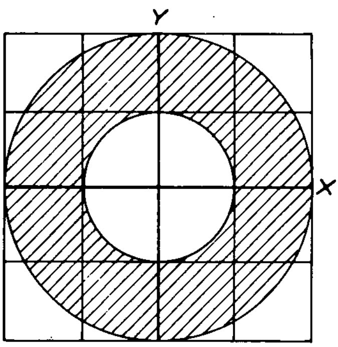
a precies één kwadrant
b precies twee kwadranten
c precies drie kwadranten
d alle kwadranten

15 Gegeven is een vierkant $ABCD$.
P is het midden van de zijde AD en Q is het midden van de zijde CD.
Voor de grootte β van $\angle PBQ$ geldt

a $\beta \leqslant 30^\circ$
b $30^\circ < \beta < 35^\circ$
c $35^\circ \leqslant \beta \leqslant 40^\circ$
d $\beta > 40^\circ$

16 Een functie $x \to px^2 + qx - 9$ heeft precies één nulwaarde.
Voor welke waarde van p en q is deze nulwaarde positief?

a $p = -1$ en $q = 3$
b $p = -1$ en $q = 6$
c $p = 1$ en $q = 3$
d $p = 1$ en $q = 6$



17 In nevenstaand assenstelsel XOY zijn getekend de cirkels met middelpunt O en straal 1 en 2. De coördinaten van de punten (x, y) van het gearceerde gebied voldoen aan

$x^2 + y^2 = p.$

Voor p geldt

a $1 \leqslant p \leqslant 2$
b $1 \leqslant p \leqslant 4$
c $\sqrt{2} \leqslant p \leqslant 2$
d $\sqrt{2} \leqslant p \leqslant 4$

18 Uit $x(1 - x) > 0$ volgt

a $x < -1$ b $-1 < x < 0$ c $0 < x < 1$ d $1 < x$

19 Als p en q reële getallen zijn en

$p\binom{2}{-3} + q\binom{-3}{2} = \binom{-8}{7},$

dan geldt

a $p < 0$ en $q \leqslant 0$
b $p < 0$ en $q > 0$
c $p \geqslant 0$ en $q \leqslant 0$
d $p \geqslant 0$ en $q > 0$

20 Van een kubus is de lengte van een ribbe 1.
Met precies acht van deze kubussen kunnen op verschillende manieren balken gevormd worden.
De totale oppervlakte van zo'n balk kan *niet* zijn

a 24 b 28 c 34 d 38

21 Van een functie f geldt voor alle waarden van p dat

$$f(p) = f(-p).$$

Een functie die hieraan voldoet, kan als voorschrift hebben

a $f(x) = -x$ b $f(x) = -x^2$ c $f(x) = x^2 + 2x$ d $f(x) = (x+1)^2$

22 Als

$$\vec{OP} = \vec{v} \text{ en } \vec{OQ} = \vec{w},$$

dan kan $\vec{PQ}$ worden voorgesteld door

a $\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$ b $\vec{v} - \vec{w}$ c $\vec{w} + \vec{v}$ d $\vec{w} - \vec{v}$

23 Van een kubus $ABCD \cdot EFGH$ is M het midden van de ribbe BC.
Voor de grootte α van $\angle DHM$ geldt

a $0^\circ < \alpha \leqslant 20^\circ$ b $20^\circ < \alpha \leqslant 40^\circ$ c $40^\circ < \alpha \leqslant 60^\circ$ d $60^\circ < \alpha \leqslant 80^\circ$

24 De grafieken van $x \to x^2 + 9$ en $x \to px$ snijden elkaar in precies één punt

a alleen voor $p = 0$
b alleen voor $p = -6$ en $p = 6$
c alleen voor $p = -6$, $p = 0$ en $p = 6$
d voor alle reële waarden van p met $-6 \leqslant p \leqslant 6$

25 In een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven de lijn l met vergelijking $y = 3$.
Het beeld van een punt (x, y) bij spiegelen in l is het punt

a $(x, 6-y)$ b $(x, y-6)$ c $(x, 3-y)$ d $(x, y-3)$

26 $\Delta\, ABC$ is gelijkvormig met $\Delta\, A'B'C'$, waarbij $a > a'$ is.
$\Delta\, PQR$ is zeker gelijkzijdig als voor de lengten van de zijden geldt

a $PQ = a + a'$, $QR = b + b'$ en $RP = c + c'$
b $PQ = a - a'$, $QR = b - b'$ en $RP = c - c'$
c $PQ = a \times a'$, $QR = b \times b'$ en $RP = c \times c'$
d $PQ = a : a'$, $QR = b \times b'$ en $RP = c : c'$

27 $V = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$ en $W = \{(x, y) \mid y = bx + a\}$ zijn gegeven voor vaste waarden van a en b met $a \neq b$.

(1) Er is een waarde van p zodat $(0, p) \in V \cap W$.
(2) Er is een waarde van q zodat $(1, q) \in V \cap W$.

a (1) en (2) zijn beide waar b alleen (1) is waar c alleen (2) is waar
d (1) en (2) zijn beide niet-waar

28 Voor welke positieve waarden van k is de doorsnede van de verzamelingen

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = k^2\} \text{ en } \{(x, y) \mid y = x - 6\}$$

leeg?

a $k < \sqrt{6}$ b $k < 3$ c $k < \sqrt{18}$ d $k < 6$

29 In een rechthoekig assenstelsel XOY is van driehoek OPQ gegeven:

$$\vec{OP} = 2\vec{v},\ \vec{OQ} = \vec{w} \text{ en } |\vec{OQ}| = |\vec{PQ}|.$$

De oppervlakte van driehoek OPQ kan worden voorgesteld door

a $|\vec{v}| \times |\vec{w}|$ b $|\vec{v}| \times |2\vec{w}|$ c $|\vec{v}| \times |\vec{v} - \vec{w}|$ d $|\vec{v}| \times |\vec{v} + \vec{w}|$

30 De functies f en g zijn gedefinieerd door $f(x) = 2px + p$ en $g(x) = px + 2p$, waarbij $p < 0$ is. Het snijpunt van de grafieken van f en g is een punt van

a het eerste kwadrant b het tweede kwadrant c het derde kwadrant d het vierde kwadrant

WISKUNDE II – MAVO 4 (2 UUR)

1 In een rechthoekig assenstelsel XOY is de cirkel met straal 5 en middelpunt O gegeven. De functie f is gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 6x + 5$ met

$$\{x \in \mathrm{IR} \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$$

als domein.

a De grafiek van f snijdt de X-as in twee punten; toon aan dat één van deze punten op de cirkel ligt.
b Toon door berekening aan dat de top T van de grafiek van f een punt van de cirkel is.
c Teken de cirkel en de grafiek van f in één figuur.
d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de cirkel in het punt T.

2 In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn de puntenverzamelingen

$$\{(x, y) \mid y = 2\},\ \{(x, y) \mid y = 2x\} \quad \text{en} \quad \{(x, y) \mid x + y = 6\}$$

gegeven.

a Geef deze verzamelingen in één figuur aan.
b Arceer in deze figuur het gebied van de puntenverzameling

$$G = \{(x, y) \mid y \geqslant 2 \ \ en \ \ y \leqslant 2x \ \ en \ \ x + y \leqslant 6\}.$$

c Teken het beeld G' van G bij rotatie om O over 180°.
d Bij *b* is een omschrijving van de verzameling G gegeven; omschrijf puntenverzameling G' op overeenkomstige wijze.

3 Van enige driehoeken ABC is gegeven $AB = 12$, $BC = 5x$ en $AC = x + 12$.

a Bereken de waarden van x waarvoor ΔABC gelijkbenig is.
b Bereken de lengten van de zijden als hoek B recht is.
c Toon aan dat ΔABC rechthoekig is als

$$\cos \beta = \frac{3}{5}$$

is.

4 De punten $P(12, 0)$ en $Q(0, 8)$ zijn gegeven in een rechthoekig assenstelsel.
Het punt M is het midden van lijnstuk PQ.
Voor de punten $A(3a, 0)$ en $B(0, 2a)$ geldt $0 < a < 4$.

a Toon aan dat AB evenwijdig is met PQ voor elk van deze waarden van a.
b Druk de oppervlakte van driehoek APM en van driehoek BQM uit in a.
c De oppervlakte van driehoek ABM wordt geschreven als $f(a)$.
Toon door berekening aan dat $f(a) = -3a^2 + 12a$.
d Bereken de grootste waarde van $f(a)$; noem de coördinaten van A en B die daarbij behoren.

5 De vectoren

$$\vec{a} = \vec{OA} \text{ en } \vec{b} = \vec{OB}$$

zijn bepaald door een gegeven parallellogram $ABCD$ met O als snijpunt van de diagonalen.

a Druk $\vec{OD}$, $\vec{AD}$ en $\vec{CD}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Op de zijde AD ligt het punt P, zodanig dat $AP = \frac{2}{3}AD$.
Bij vermenigvuldiging met de factor 3 ten opzichte van O is Q het beeldpunt van P.
b Druk $\vec{OP}$ en $\vec{OQ}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
c Toon met behulp van het voorafgaande aan dat Q op de rechte door C en D ligt.

WISKUNDE I – MAVO 3 (1½ UUR)

Een meerkeuzetoets evenals bij mavo-4. De opgaven 1 t/m 5 en 11 t/m 15 waren gelijk aan die voor mavo-4. De andere zijn:

6 Uit $-\frac{1}{3}x + 5 < 4$ volgt

a $x < -3$ b $x > -3$ c $x < 3$ d $x < 3$

7 Het origineel van 0 bij de functie $x \to 2x + 4$ is

a -2 b 0 c 2 d 4

8 De grafiek van $\{(x, y) \mid x - y = -3\}$ is de lijn door de punten

a $(-3, 0)$ en $(0, -3)$ b $(-3, 0)$ en $(0, 3)$ c $(3, 0)$ en $(0, -3)$ d $(3, 0)$ en $(0, 3)$

9 De lengten van de zijden van een driehoek zijn 4, 5 en 6.
Deze driehoek is gelijkvormig met een driehoek waarvan de lengten van de zijden zijn

a 16, 25 en 36 b $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{12}$ en $\frac{1}{10}$ c 5, 6 en 7 d $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{4}$

10 De top van de grafiek van de functie $x \to 1 - x^2$
is het punt

a $(-1, 0)$ b $(0, -1)$ c $(0, 1)$ d $(1, 0)$

16 De oplossingsverzameling van $\frac{1}{2}(2x - 2) = \frac{1}{3}(3x - 3)$ is

a ϕ b $\{0\}$ c $\{1\}$ d $\mathbb{R}$

17 In elke driehoek ABC kan voor de lengte van de hoogtelijn uit C geschreven worden

a $a \sin \alpha$ b $a \cos \alpha$ c $b \sin \alpha$ d $b \cos \alpha$

18 In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn de punten

$P(-4, -3), Q(8, -3)$ en $R(-4, 6)$

gegeven.
Bij vermenigvuldiging ten opzichte van O met de factor $-\frac{1}{2}$ zijn de beeldpunten respectievelijk P', Q', R'.
Hoeveel van deze beeldpunten zijn roosterpunten?

a precies nul b precies één c precies twee d precies drie

19 Voor elke waarde van $p \neq 0$ is de richtingscoëfficiënt van de grafiek van $x + py = 0$ gelijk aan

a p b $\frac{1}{p}$ c $-p$ d $-\frac{1}{p}$

20 Van een balk $ABCD \cdot EFGH$ is $AB = 4$, $BC = 2$ en $CG = 3$. De omtrekken van het diagonaalvlak $BCHE$ en een van de zijvlakken kunnen zich *niet* verhouden als

a $7:4$ b $7:5$ c $7:6$ d $7:7$

21 $x - 1$ is een factor van

a $(-x-1)^2$ b $(x+1)^2$ c $-x^2+1$ d x^2+1

22 In een rechthoekig assenstelsel is V de verzameling van de punten die evenver van de assen liggen.
Verder is gegeven $W = \{P \mid PA = PB\}$ met de vaste punten $A(-3, 1)$ en $B(-1, 3)$.
$V \cap W$ bevat

a geen elementen b precies één element c precies twee elementen d meer dan twee elementen

23 Van een balk $ABCD \cdot EFGH$ is $AB = 15, BC = 8$ en $CG = 8$.
S is het snijpunt van AC en BD.
Voor driehoek ESC geldt

a $ES \neq CS$ en de oppervlakte is 34 b $ES \neq CS$ en de oppervlakte is 68
c $ES = CS$ en de oppervlakte is 34 d $ES = CS$ en de oppervlakte is 68

24 Een kwadratische functie bereikt voor $x = 1\frac{1}{2}$ een uiterste functiewaarde.
De nulwaarden van deze functie kunnen zijn

a -3 en 0 b -2 en 1 c -1 en 2 d 0 en 3

25 Het beeld van (x, y) bij spiegelen in een lijn l is $(4 - x, y)$.
Een vergelijking van l is

a $x = -4$ b $x = -2$ c $x = 2$ d $x = 4$

WISKUNDE II – MAVO 3 (1½ UUR)

1 De puntenverzamelingen

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x - 4\}$$

en $$W = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + 3y = 21\}$$

zijn gegeven.

a Bepaal $V \cap W$ door berekening.
b Geef V en W aan in één rechthoekig assenstelsel XOY.

Voor elke reële waarde van p bestaat een puntenverzameling

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid px + y = 0\}.$$

c Voor welke waarde van p is $V \cap W \cap U$ niet leeg?
Geef voor die waarde van p de verzameling U in dezelfde figuur aan.

2 In een rechthoekig assenstelsel zijn de punten $O(0, 0)$, $P(3, 3)$ en $Q(1, 7)$ gegeven.
Bij spiegelen in een lijn is P het beeldpunt van O.
Bij spiegelen van Q in dezelfde lijn is het beeldpunt R.

a Noem de coördinaten van R.
b Bereken de oppervlakte van vierhoek $OPQR$.
c Bereken de grootte van hoek ROP in graden nauwkeurig.
d Kan het lijnstuk OR het beeld zijn van het lijnstuk OP bij een spiegeling?
Zo ja, noem een vergelijking van de symmetrie-as. Zo nee, waarom niet?

3 Van een kubus $ABCD{\cdot}EFGH$ is de lengte van een ribbe 8.
P is het midden van de ribbe AB.
Q is het midden van de ribbe BC.
S is het snijpunt van PQ en BD.

a Toon aan dat driehoek PQH gelijkbenig is.
b Bereken de grootte van hoek HSD in graden nauwkeurig.
c Bereken de oppervlakte van driehoek PQH.

4 Met $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$ als domein is de functie f gedefinieerd door $f(x) = -x^2 + 4x$.

a Los de vergelijking $f(x) = 3$ op.
b Bereken de maximale waarde van $f(x)$.
c Teken de grafiek van f in een rechthoekig assenstelsel.
d Het beeld van de grafiek van f bij spiegelen in de oorsprong is de grafiek van een functie g.
Bepaal deze functie g door het domein en een functievoorschrift te noemen.

WISKUNDE – HAVO (3 UUR)

1 De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = x^2 - 8x + 2p + 6$ en $g(x) = 2x - 4p$.
a Voor welke waarden van p ligt de top van de grafiek van f op de grafiek van g?
b Voor welke waarden van p snijden de grafieken van f en g elkaar op de X-as?
c Voor welke waarden van p raken de grafieken van f en g elkaar?

2 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven een lijn l met vergelijking $x - y + 2 = 0$ en een lijn m met vergelijking $3x - 4y + 9 = 0$.

a Stel een vergelijking op van de lijn die door het snijpunt van l en m gaat en die loodrecht staat op m.

b Stel vergelijkingen op van de cirkels met straal 2 die m raken en waarvan de middelpunten op l liggen.

3 Een functie f is gedefinieerd door $f(x) = {}^3\log(4-x)$.

a Los op: $f(x) \leqslant 2$.

b Teken op het interval $-5 \leqslant x < 4$ de grafiek van f.

c De rij $f(4-p), \frac{1}{2}, f(p), q$ is rekenkundig.
Bereken p en q.

4 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven een verzameling V van punten (x, y) waarvoor geldt:

$$x^2 + y^2 \leqslant 4 \text{ en } y^2 - 4x - 4 \leqslant 0.$$

a Teken en arceer de verzameling V.

b Teken de deelverzameling van V waarvoor geldt dat $(x + y - 1)(x - y) = 0$ is.

c Voor welke positieve waarde van p bestaat de deelverzameling van V waarvoor geldt dat $x + y - p = 0$ is, uit één punt?

5 Van een kubus $ABCD{\cdot}EFGH$ is punt M het midden van de ribbe AE.

a Bereken de hoek van de lijn AF en het vlak $ABGH$.

b Construeer in een projectiefiguur van de kubus het snijpunt S van de lijn DF en het vlak door M evenwijdig aan de lijnen BH en FG.

6 De functies f en g zijn voor $0 \leqslant x \leqslant \pi$ gedefinieerd door $f(x) = \sin^2 x$ en $g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$.

a Los op: $f(x) \leqslant g(x)$.

b Teken in één figuur de grafieken van f en g.

c Een variabele lijn loodrecht op de X-as snijdt zowel de grafiek van f als de grafiek van g.
Bereken de maximale afstand van deze snijpunten.

WISKUNDE (EXPERIMENT) – HAVO (3 UUR)

1 Een functie f met domein $\{x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant x \leqslant 6\}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - 4x.$$

a Bereken de uiterste waarden van $f(x)$.
Teken de grafiek van f.

b Stel een vergelijking op van de lijn die deze grafiek raakt in een punt waarvoor $x = 2$.
Eveneens van de lijn die deze grafiek raakt in een punt waarvoor $x = 0$.

c Bereken de tangens van de hoek van deze raaklijnen.

2 Ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel $OXYZ$ zijn gegeven de punten A (4, 0, 0), B (4, 5, 0), C (0, 6, 0), D (−3, −1, 0) en T (0, 0, 6).

a Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen AC en BD.

b Stel een vectorvergelijking op van het vlak CDT.
Stel een vectorvergelijking op van de snijlijn van de vlakken CDT en XOZ.

c Bereken de hoek van de lijn OX en het vlak CDT.

d Bereken de afstand van punt B en vlak CDT.

3 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de parabolen

p_1 met vergelijking $y^2 = x$ en p_2 met vergelijking $y^2 + x - 8y + 8 = 0$.

a Toon door berekening aan dat deze parabolen één gemeenschappelijk punt hebben. Noem dit punt A en bereken de coördinaten van A.
b Bewijs dat de parabolen elkaar in A raken.
Wat is de vergelijking van de gemeenschappelijke raaklijn door A?
c Bewijs dat p_1 en p_2 elkaars beeldfiguur zijn bij een puntspiegeling.

4 De functie $f: x \rightarrow -2 + \sqrt{x}$ heeft een zo groot mogelijke deelverzameling van $\mathbb{R}$ als domein.
a Teken de grafiek van f.
b Stel een vergelijking op van de lijn die de grafiek van f raakt en die evenwijdig is aan de lijn met vergelijking $x - 6y = 0$.
c Welk punt van de grafiek van f heeft een minimale afstand tot het punt $(2, -2)$?

5 Een functie f is voor $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \cos x + (\sqrt{3}).\sin x.$$

a Wat is het bereik van f?
b Teken de grafiek van f.
c Een lijn met vergelijking $y = \sqrt{3}$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B.
Bereken de afstand van A en B.

WISKUNDE I – VWO (3 UUR)

1 Een verzameling functies f_p is voor elke reële x gegeven door

$$f_p(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - 3px^2 + 8p^2x \text{ waarbij } p > 0 \text{ is.}$$

a Bewijs dat voor elke $p > 0$ geldt dat $f_p(x)$ twee positieve extreme waarden heeft.
b Aan de grafiek van elke f_p worden twee raaklijnen getrokken die elkaar in een punt S snijden.
De ene lijn raakt de grafiek in het punt $(0, 0)$ en de andere lijn raakt de grafiek in het buigpunt.
Wat is de verzameling van de punten S?

2 Een functie f is voor $x > 0$ behalve voor $x = e^{-1}$ gedefinieerd door

door $f(x) = x : (1 + \ln x)$.

a Bewijs dat de grafiek van f precies één buigpunt heeft.
b Los op: $f(x) . (\frac{1}{x}) \geqslant 1$.
c Teken de grafiek van f.

3 Op het interval $0 < x < \pi$ is een functie f gegeven door

$$f(x) = a\cos x - b\sin x \text{ waarbij } a \text{ en } b \text{ positieve constanten zijn.}$$

De grafiek van f snijdt de X-as voor $x = p$.
Voor $x = q$ heeft $f(x)$ een uiterste waarde.

a Bewijs dat $q - p = \frac{1}{2}\pi$.
b Bewijs dat $f(q)$ het minimum van $f(x)$ is.
c Druk de oppervlakte van het gesloten vlakdeel begrensd door de grafiek van f, de X-as en de lijn $x = q$ uit in a en b.

4 Een functie f is voor $-6 \leqslant x \leqslant 3$ gedefinieerd door

$$f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

a Onderzoek of de functie differentieerbaar is voor $x = 2$.
b Bewijs dat de lijn door de eindpunten van de grafiek van f deze grafiek raakt.
Bereken de oppervlakte van het gesloten vlakdeel begrensd door deze lijn en de grafiek van f.

WISKUNDE I (Experiment) – VWO (3 UUR)

De opgaven 1, 2 en 3 zijn gelijk aan die van het examen dat hiervoor is afgedrukt.

4 Een kromme K is gegeven door de parametervoorstelling

$$x = t^2 - 2t + 1 \text{ en } y = e^{t-2}.$$

a Welke raaklijnen van K gaan door de oorsprong $(0, 0)$?
b Onderzoek of K één of meer asymptoten heeft.
Teken K.

WISKUNDE II – VWO (3 UUR)

1 In een kubus $ABCD\,.\,EFGH$ met ribbe $2p$ ligt op de ribbe AB een variabel punt P en op de ribbe BF een variabel punt Q zodat $AP = BQ = k$.
Het snijpunt van de lijnen AQ en EP is punt S.

a Bewijs dat elke vierzijdige piramide $H\,.\,EFQS$ een omgeschreven bol heeft.
b Druk k uit in p voor het geval dat deze bol een straal van $1\frac{1}{2}p$ heeft.
c Punt P doorloopt de ribbe AB.
Geef een volledige omschrijving van de verzameling van de zwaartepunten van de viervlakken $ADES$.

2 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven
een cirkel γ met vergelijking $x^2 + y^2 = 4$ en
een parabool π met vergelijking $y^2 - 2x - 8 = 0$.

a Welke punten van π hebben een minimale afstand tot γ?
b Door een variabel punt P binnen γ wordt een lijn getrokken die γ in de punten A en B en die π in de punten C en D snijdt zo dat P zowel het midden is van koorde AB als van koorde CD.
Teken de verzameling van de punten P.

3 Van een vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak een vierkant met zijde $2p$.
De ribbe DT staat loodrecht op het grondvlak; $DT = 2p$.
Het midden van de ribbe CT is punt E.

a Druk de straal van de kleinste bol die de lijnen AT en BE raakt, uit in p.

b Bewijs dat er op de lijn CD twee punten liggen waardoor geen lijn mogelijk is die zowel de lijn AT als de lijn BE snijdt.
Druk de afstand van deze punten uit in p.

4 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven een cirkelbundel met vergelijking

$$x^2 + y^2 - 2p(x + 4y) = 0 \text{ waarbij } p \neq 0 \text{ is.}$$

a Voor welke waarden van p hebben de bijbehorende cirkels van de bundel geen enkel punt gemeen met de lijn met vergelijking $y - 2 = 0$?

b Welke betrekking bestaat er tussen de verschillende parameters p_1 en p_2 voor het geval dat de bijbehorende cirkels van de bundel een gemeenschappelijke raaklijn hebben die evenwijdig aan de X-as is?
Stel een vergelijking op van de verzameling van de raakpunten.

Charles Hermite

Dr. A.J.E.M. SMEUR

Breda

De Franse wiskundige Charles Hermite is 150 jaar geleden op 24 december 1822, geboren te Dieuze, een plaatsje op ca. 40 km ten oosten van Nancy. In 1828 verhuisde het gezin, waarin hij het zesde van zeven kinderen was, naar Nancy. Zijn ouders kozen voor hem het best mogelijke onderwijs en toen het Lyceum in Nancy niet voldeed stuurden zij hem naar Parijs. Daar was hij tot zijn 18e jaar leerling van het Lycée Henri IV. Daarna, om zich voor te bereiden op de toelating tot de École Polytechnique, was hij leerling van het Lycée Louis le Grand. Dat examen deed hij pas eind 1842 en hij slaagde maar heel middelmatig. Haast gebeurde hetzelfde als 15 jaar eerder met Galois (1811-1832), ook leerling van het Lycée Louis le Grand, die tweemaal voor de École Polytechnique geweigerd werd. En evenals destijds Galois kon Hermite in 1842 al wel een beter wiskundige genoemd worden dan verschillende van zijn examinatoren. Hij bleef slechts één jaar aan de École Polytechnique maar later, in 1847-1848, heeft hij toch nog de examens gedaan waardoor hij bevoegd werd als docent. In 1848 trouwde hij met een zuster van de wiskundige Bertrand (1822-1900). In datzelfde jaar werd hij benoemd als examinator voor toelating tot de École Polytechnique. Hij onderwees enige jaren aan het Collège de France, werd al in 1856 gekozen als lid der Académie maar ondanks zijn reeds verworven internationale bekendheid duurde het nog tot 1869 eer hij een benoeming als hoogleraar kreeg, eerst aan de École Polytechnique, in 1870 gevolgd door de Sorbonne. Daar bleef hij tot 1897. Op 14 januari 1901 is hij overleden.

Zijn wiskundige werk bestrijkt functietheorie, met name de elliptische functies, getallen- en invariantentheorie. Het meest bekend geworden is hij wel door de oplossing van de vijfdegraadsvergelijking en het bewijs van de transcendentie van e. Nadat in de jaren 1515-1540 Italiaanse wiskundigen erin geslaagd waren de algemene derde- en vierdegraadsvergelijking op te lossen richtte de aandacht zich vervolgens, begrijpelijkerwijs, op het oplossen der algemene vijfdegraadsvergelijking. In het bijzonder von Tschirnhausen (1651-1708), Euler (1707-1783) en Lagrange (1736-1813) hebben zich ermee bezig gehouden, zonder een oplossing te vinden. Gauss (1777-1855) sprak in 1799 het vermoeden uit, dat zo'n oplossing onmogelijk was en hij kondigde een studie erover aan. In datzelfde jaar nog gaf Ruffini (1765-1822) een bewijs van die onmogelijkheid, dat echter naderhand niet

juist bleek te zijn. Abel (1802-1829) was de eerste aan wie zo'n bewijs wel gelukte, in 1826, nadat een eerder bewijs van hem, uit 1824, ook niet juist gebleken was.
Door middel van transformaties was het in 1786 al aan de Zweedse wiskundige Bring (1736-1798) gelukt de algemene vijfdegraadsvergelijking op de vorm $x^5 + x + a = 0$ te brengen. Onafhankelijk van hem was dit in 1834 nogmaals gevonden door een Engelse wiskundige Jerrard. Diens resultaat was uitgangspunt voor Hermite in een artikel 'Sur la résolution de l'équation du cinquième degré' (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1858). De oplossing is onmogelijk als men zich beperkt tot wortelgrootheden. Gebruikt men transcendente functies dan is wel een oplossing aan te geven. Dit was bijvoorbeeld al voor de derdegraadsvergelijking bekend. Hermite geeft als voorbeeld de vergelijking $x^3 - 3x + 2a = 0$ met als oplossingen

$$2 \sin \frac{A}{3}, \quad 2 \sin \frac{A + 2\pi}{3} \quad \text{en} \quad 2 \sin \frac{A + 4\pi}{3}, \quad \text{waarbij } \sin A = a.$$

Hij laat vervolgens zien hoe op soortgelijke wijze ook een oplossing te geven is van de vergelijking van Jerrard maar dan met behulp van elliptische functies. Dit geheel onverwachte resultaat heeft hem veel roem gebracht.
Waren er nu ook functies te vinden om de algemene vergelijking van de graad n op te lossen? Hermite's beste leerling, Poincaré (1854-1912) slaagde daar in 1880 in met behulp van een generalisering der elliptische functies.
Vermelden wij nog, dat Hermite reeds als leerling van het Lycée Louis le Grand voor zich zelf werken van Lagrange en Gauss bestudeerd had en in 1842, dus nog voor zijn toelating tot de École Polytechnique, al een artikel gepubliceerd had waarin hij de onmogelijkheid aantoonde van een door Lagrange geopperde mogelijkheid om tot een oplossing van de vijfdegraadsvergelijking te komen.
Hermite's bewijs van de transcendentie van e is van 1873. Liouville (1809-1882) heeft als eerste het bestaan van transcendente getallen aangetoond; in 1844 gaf hij een verzameling van dergelijke getallen. Een geheel ander probleem echter is het om van een tevoren gegeven getal aan te tonen of het al dan niet transcendent is. Dit is voor het eerst aan Hermite gelukt in een artikel 'Sur la fonction exponentielle' (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1873). Hij bewees daarin voor het getal e 'l'impossibilité de toute rélation de la forme $N + e^a N_1 + e^b N_2 + \ldots + e^h N_n = 0$' met als conclusie 'que le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique de degré quelconque à coefficients entiers'. Ook dit bewijs verschafte hem weer veel internationale roem. Interessant te vermelden is nog, dat hij aan het einde van zijn artikel benaderingen afleidt:

$$(1)\ e = \frac{5}{2}, e^2 = 7; \quad (2)\ e = \frac{337}{124}, e^2 = \frac{916}{124}; \quad (3)\ e = \frac{58019}{21344}; e^2 = \frac{157712}{21344}.$$

(De derde benadering van e heeft pas een afwijking in de zevende decimaal).
In 1761 al had Lambert (1728-1777) de irrationaliteit van π bewezen. Met de transcendentie van π heeft Hermite zich niet ingelaten. Het bewijs daarvan leverde von Lindemann (1852-1939) in 1882 met methoden, die overeenkwamen met de door Hermite gebruikte. Met dit bewijs was tevens de onmogelijkheid der cirkelkwadratuur aangetoond.

Hoe moeilijk het is de transcendentie van een gegeven getal aan te tonen kan nog hieruit blijken, dat Hilbert (1862-1943) in 1900 te Parijs als zevende van zijn bekende 23 problemen noemde: na te gaan of α^β (α algebraïsch en $\neq 0$ of 1, β irrationaal en algebraïsch) al of niet transcendent is. Het bewijs, dat het wel transcendent is, gaf Gelfond (1906-) in 1934. Het hierop volgende probleem echter, of α^β transcendent is als α en β het beide zijn, is nog niet opgelost, ook niet voor bijzondere gevallen als bijvoorbeeld e^e of π^π.
Zoals reeds gezegd is had Liouville al in 1844 het bestaan van transcendente getallen aangetoond. Vermeldenswaard is nog het volgende. In een brief van 29 november 1873 schreef Cantor (1845-1918) aan Dedekind (1831-1916) zijn vermoeden, dat het continuum niet aftelbaar zou zijn. Nog vóór Cantor's bewijs (7 december 1873) wees Dedekind er in zijn antwoordbrief al op, dat de verzameling der algebraïsche getallen (met inbegrip van de complexe) wel aftelbaar is. Dit houdt, samen met Cantor's bewijs, in, dat de verzameling der transcendente getallen niet aftelbaar is.
Tenslotte nog iets over Hermite als mens. Hij onderhield een zeer uitvoerige correspondentie met zijn tijdgenoten – wiskundigen. Met zijn vriendelijk en beminnelijk karakter moedigde hij anderen steeds aan en trachtte hij onenigheid te overbruggen. Als een der eersten, en nog wel buiten Duitsland, prees hij openlijk Cantor's leer over de oneindige verzamelingen. Op het Parijse Congres nam hij het voor Weierstrass op. En speciaal voor ons land zij hier vermeld zijn vriendschap met de Nederlandse wiskundige Thomas Jan Stieltjes (1856-1894), die hij zeer bewonderde en die hij in 1886 een professoraat in Toulouse bezorgde.

Leesportefeuille

Willen de deelnemers aan de leesportefeuille bij het terugzenden van tijdschriften naar de beheerder deze sturen naar zijn nieuwe adres:
Dr. A.J.E.M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (NB)

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Elemente der Mathematik, XXVI^5 – XXVII^4; september 1971-juli 1972.

J.O. Fleckenstein en B.L. van der Waerden, Zum Gedenken an Andreas Speiser;
B. Weissbach, Zu Formeln von Fejes Toth und Hoppe für den Inhalt sphärischer Tetraeder;
H. Harborth, Antwort auf eine Frage von P. Erdös nach fünf Punkten mit ganzzahligen Abstände;
J. Paasche, Eine Verallgemeinerung der Cesàro-Rekursion.

H. Frank, Zur ebenen hyperbolischen Kinematik;
A.J. Nechi, Kürsseste Verbindungsstrecken vorgeschriebener Steigung zwischen zwei windschiefen Geraden;
D. Laugwitz, Eine mit Zirkel und Lineal nicht lösbare Kegelschnittaufgabe;
D. Suryanaranaya, New inversion properties.

J.E. Hofmann, Ueber Kreisbogenvierecke;
E. Heil, Eine Verschärfung der Bieberbachschen Ungleichung;
B. Bollobas, Functionals close to each other;
L. Kuipers and J.S. Shiue, A distribution property of the sequence of Lucas numbers;
K. Szymiczek, Note on arithmetical progressions with equal products of five terms;
H. Stettner, Nichtnegative Matrizen mit konstanter Zeilensumme.

J.D. Dunitz and J. Waser, The planarity of the equilateral isogonal pentagon;
J.E. Wetzel, On Moser's problem of accomodating closed curves in triangles;
T.S. Nanjundiah, A note on the elliptic integral K (k);
R.C. Entzinger, A party of permutations;
R.S. Doran, A theorem which is equivalant to the axiom of choice.

J. Krames, Ueber Fusspunktkurven auf einschaligen Hyperboloiden;
A. Herzer, Eine Verallgemeinerung des Satzes von Dandelin;
J. Tölke, Eine Kennzeichnung der sphärischen Trochoidenbewegung;
S. Šmakal, Eine Bemerkung zu einem Satz über räumliche Fünfecke;
B.L. van der Waerden, Nachtrag zu 'Ein Satz über räumliche Fünfecke'.

F. Hohenberg, Projektion des Torus in isotroper Richtung;
A. Uhl, Angeordnete affine Ebene als Ebenen mit einem System von Halbgeraden, und euklidische Ebenen, die genau eine Anordnung besitzen;
A. Rotkiewicz, On a problem of W. Sierpinski;
S. Lajos, On regular right duo semigroups;
K.N. Srinivassa Rao, A contour for the Poisson integral.

Boekbesprekingen

Grundlagen der modernen Mathematik, herausgegeben von *Herbert Meschkowski,* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1972, VI + 371 blz., 57.60 DM.

De titel van het boek was voor velen duidelijker geweest als het woord 'modernen' weggelaten was. Het boek handelt over de grondslagen van de wiskunde en gaat niet speciaal over structuren, zoals men misschien uit de titel zou vermoeden.

Het boek bestaat uit een vijftiental artikelen van de hand van verschillende schrijvers over de grondslagenkwesties. Op uiterst bekwame wijze is hiervan een geheel gemaakt. Het is niet geschikt als inleiding in de grondslagen. Heeft men echter enige aanknopingspunten, dan zal men er snel veel wetenswaardigs in vinden en eventueel gestimuleerd worden tot verdere studie. Zowel de aard van de wiskundige methode als die van het wiskundige object worden van verschillende kanten belicht. Natuurlijk vindt men een inleiding in de logistiek. Maar daarnaast worden verschillende brandende kwesties waartoe de logistische methode aanleiding vindt, besproken, zoals de mogelijkheid een intuïtief gegeven systeem te formaliseren en het beslisbaarheidsprobleem. De aard van het mathematische object wordt van verschillende kanten belicht: de formalistische beschouwing, de intuïtionistische, de betekenis van definitie door recursie.

Men krijgt wel de indruk, dat de formalistische methode in het centrum van de belangstelling van de auteurs staat. Over het logicisme wordt niet of nauwelijks gesproken. De intuïtionistische methode komt wel telkens ter sprake, maar in hoofdzaak om als doelwit te dienen voor kritiek. Ik heb de indruk, dat sommige auteurs het wezenlijke van het intuïtionisme niet voldoende begrepen hebben.

Het geheel wordt besloten door een min of meer samenvattend artikel van de hand van de samensteller van het boek getiteld 'Was ist Mathematik? ' Dit zonder twijfel boeiende artikel bevestigt, dat de voorkeur wordt gegeven aan de formalistische methode.

Al met al een mooi stuk werk, waarvan ik de lectuur stellig kan aanbevelen.

P.G.J. Vredenduin

Jerry D. Strange, Bernard J. Rice, *Analytic Geometry and Calculus,* with technical applications. John Wiley and Sons, Inc.,New York, London, 1970, 462 blzn, 88. sh.

Het boek is bestemd voor hen, die voldoende wiskunde willen leren om de meeste, eenvoudige toepassingen te kunnen begrijpen.

Er wordt uitgegaan van de kennis van college algebra en trigonometrie. Op een tweetal hoofdstukken na is de analytische meetkunde opgenomen in de analyse-tekst en behandeld in een omvang die strikt nodig is. De auteurs houden zich niet bezig met exacte bewijzen of ingewikkelde stellingen. Op een gemakkelijk te volgen wijze bieden ze differentiaal- en integraalrekening aan, uiteraard voorzien van diverse mechanische en natuurkundige toepassingen. Hierbij worden de oneigenlijke integralen niet overgeslagen.

Vervolgens komen er hoofdstukken over differentiaalvergelijkingen en tweedimensionale analyse, terwijl het boek besluit met een hoofdstuk over de approximatie door middel van reeksen, o.a. de fourierreeksen.

In de tekst zijn vele diagrammen, grafieken en tabellen opgenomen. Een grote verzameling vraagstukken is ingebouwd met een lijst van antwoorden voor de oneven genummerde opgaven. Verder bevat het boek een index en een appendix met tafels van de goniometrische functies, de logaritmische en de exponentiële functies, alsmede een overzicht van de veel voorkomende primitieve functies. Ondanks de vrij hoge prijs toch wel een nuttig boek voor hen die het onderwijs willen doorspekken met zoveel mogelijk toepassingen.

J.J.Wouters.

Herbert Meschkowski, *Didaktik der Mathematik*, Band I: Primarstufe, mit Beiträgen von Birgit Burchardt, Martin Glatfeld, Hermann Maier, Herbert Meschkowski, Walter Plöszl, Helmut Siemon, Klaus Winkler, Bernd Wurl, 328 blz., geb. DM 29.–, Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

Ondanks de 'Empfehlungen der Kultusministerkonferenz' van 3 oktober 1968, waarin richtlijnen werden gegeven voor de modernisering van het wiskunde-onderwijs in de Grundschule, is er in Duitsland nog geen eenstemmigheid bereikt over de vraag in welk leerjaar nu op de meest efficiënte wijze de verzamelingsleer aan de orde zou moeten worden gesteld. Er zijn landen waar men er in het eerste leerjaar mee begint, andere waar de behandeling tot het derde of tot het vierde jaar wordt uitgesteld. Bovendien zijn de bezwaren die men tegen álle introductie van verzamelingsleer in het beginonderwijs naar voren pleegt te brengen, nog geenszins van de lucht.
Vóor een betrouwbare oriëntatie inzake de problematiek waarvoor een vroegtijdige behandeling van het verzamelingsbegrip onderwijzers en leraren stelt, is dit eerste deel van Meschkowski's nieuwe serie van grote waarde. Alle medewerkers zijn hetzij als hoogleraar, hetzij als docent bij het onderwijs op de Pädagogische Hochschule betrokken. Meschkowski zelf geniet in ons land reeds bekendheid, o.a. door zijn *'Wandlungen des mathematischen Denkens'* dat op boeiende wijze inleidt tot een aantal problemen die op de grondslagen van de wiskunde betrekking hebben en die voor ons voortgezet onderwijs betekenis bezitten.
Voorop staat in zijn *Didaktik der Mathematik* dat alle modernisering van het wiskunde-onderwijs op de basisschool tot mislukking zal zijn gedoemd als de onderwijzers over onvoldoende wiskundige vakkennis zouden beschikken. Daarom is het toe te juichen dat Meschkowski zijn boek in een wetenschappelijk en een didaktisch gedeelte heeft gesplitst. In het eerste deel wordt een zakelijk overzicht gegeven over Mengen, Relationen, Zahlbegriff, Strukturen, Geometrie, waaraan ieder het niveau van zijn vakkennis kan toetsen. Ook de Nederlandse wiskundeleraren, in het bijzonder zij die in de brugklassen lesgeven, zullen met de heldere uiteenzettingen die we hier aantreffen hun voordeel kunnen doen.
In het didactische gedeelte dat geschreven is met het oog op het onderwijs in de eerste vier schooljaren vinden we hoofdstukken over Mathematische Lernspiele, Mengen und ihre Verknüpfungen, Zahlen und Zahlverknüpfungen, Operative Einführung in das Rechnen mit natürlichen Zahlen, Relationen, Geometrische Themen im Mathematikunterricht der Grundschule.
In het eerste hoofdstuk worden de mathematische spelen in 26 typen gerubriceerd en worden het gebruikte materiaal, het spelverloop met de beoogde doelstellingen geanalyseerd. Uit het boeiend geschreven hoofdstuk over verzamelingen wordt het wel duidelijk hoe moeilijk het nog is in het basisonderwijs ten aanzien van de besproken materie alle didactische klippen te vermijden. Zo worden er verzamelingen besproken die louter letters tot element hebben, waarna de leerling met die letters woorden heeft te fabriceren, een activiteit die wezenlijke mathematische vorming kan blokkeren.
De auteur overschat m.i. het begripsvermogen van zijn leerlingen als hij deze in hun lagere schoolperiode reeds rijp acht voor het geven van het bewijs van de stelling dat de lege verzameling deelverzameling is van elke verzameling.
Terwille van een 'einwandfreie Einführung des Zahlbegriffes' wordt de volgende weg uitgestippeld: Objekte-Mengen-Aequivalenz von Mengen-Klassen-natürliche Zahlen. De onderwijzer dient zeer zeker dit schema voor ogen te hebben, maar het is wel de vraag of op deze wijze in de klas op verantwoorde wijze aangeknoopt kan worden bij het intuïtieve getalbegrip waarover de leerlingen bij hun komst op school reeds beschikken.
Het hoofdstuk over de operatieve invoering der natuurlijke getallen heeft een alternatief karakter. Steunend op onderzoekingen van Lorenzen tracht de auteur theoretische complicaties waartoe de weg via het verzamelingsbegrip voert te vermijden. Hij gaat daarbij uit van 'Strichliste', in eerste instantie een soort kerfstokmethode.
Bij de relaties treden de orderelaties en de equivalentierelaties op de voorgrond; enige strukturen worden blootgelegd. In het meetkundige slothoofdstuk komt naar voren hoe sterk het Duitse onderwijs hier inhoudelijk van het Nederlandse verschilt. De inhoud is echter voor

een gemoderniseerd wiskunde-onderwijs op onze basisscholen zeker van belang.
Achterin het boek zijn waardevolle literatuurlijsten opgenomen, opvolgend voor wiskundige vakliteratuur, didactische lectuur en schoolboeken.
Het boek is smaakvol uitgegeven, handig van formaat en rijk van inhoud. Het is van waarde voor alle onderwijzers met behoorlijke wiskundige vakkennis die zich voor de modernisering van het rekenonderwijs op de basisschool daadwerkelijk willen inzetten én voor de docenten bij ons voortgezet onderwijs.
Met belangstelling zien we de volgende delen van de serie tegemoet.

Joh. H. Wansink.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.

286 Aan een of ander cupduel doen n clubs mee. Is in een ronde het aantal deelnemers oneven, dan loot er één club vrij. De overige spelen twee aan twee tegen elkaar; de verliezers vallen af. Hoeveel wedstrijden hebben er in totaal plaats?

287 Rangschik op willekeurige wijze de natuurlijke getallen 1, 2, ..., 10. B.v.

7 4 10 2 8 6 1 9 5 3.

Vorm hieruit een stijgende deelrij met maximale lengte: 2, 8, 9. En ook een dalende deelrij met maximale lengte: 10, 8, 6, 5, 3. De lengte van de eerste rij is 3, die van de tweede 5, hun som 8. De uitkomst 8 is afhankelijk van de gekozen volgorde van de getallen 1, 2, . . ., 10.
Doe nu hetzelfde met de getallen 1, 2, . . ., 100. Neem een willekeurige rangschikking. Noem p de maximale lengte van een stijgende deelrij en q de maximale lengte van een dalende deelrij. Gevraagd wordt nu de kleinste waarde, die $p + q$ kan aannemen.

Oplossingen

284 Gevraagd werd in hoeveel koordenvierhoeken elke koordenvierhoek verdeeld kan worden.
$n = 4$. Elke koordenvierhoek kan in 4 koordenvierhoeken verdeeld worden door uit het middelpunt van de omgeschreven cirkel loodlijnen op de zijden neer te laten.
Gevolg. Als de stelling juist is voor $n = k$, dan is de stelling ook juist voor $n = k + 3$.
Hulpstelling. Elke driehoek kan in 3 koordenvierhoeken verdeeld worden door uit het middelpunt van de ingeschreven cirkel loodlijnen op de zijden neer te laten.
$n = 5$. In fig. 1 zien we, dat elke koordenvierhoek verdeeld kan worden in een koordenvierhoek, een gelijkbenig trapezium (dat ook een koordenvierhoek is) en een driehoek. De koordenvierhoek kan dus in 5 koordenvierhoeken verdeeld worden. (Mocht de driehoek ontbreken, dan is de koordenvierhoek verdeeld in 2 koordenvierhoeken en kan volgens bovenstaand 'gevolg' ook in 5 koordenvierhoeken verdeeld worden.)
$n = 6$. Een koordenvierhoek kan verdeeld worden in twee driehoeken en dus in 6 koordenvierhoeken.
De stelling is dus juist voor $n \geqslant 4$.

$n = 3$. Om te laten zien, dat de stelling voor $n = 3$ niet juist is, is het voldoende één koordenvierhoek te construeren, die niet in 3 koordenvierhoeken verdeeld kan worden.

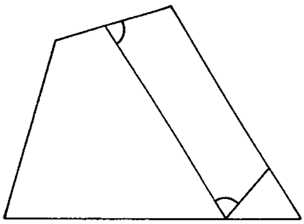


Fig. 1

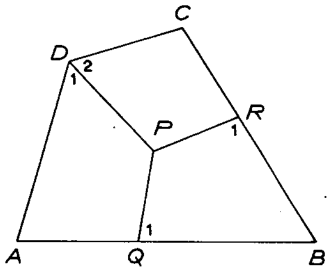


Fig. 2

Nu kan elke vierhoek op drie topologisch verschillende manieren in 3 vierhoeken verdeeld worden. Zie fig. 2, 3 en 4. Voor het ontstaan van 3 koordenvierhoeken zou in fig. 2

$$\angle Q_1 = \angle D_1 \text{ en } \angle R_1 = \angle D_2$$

moeten zijn, hetgeen tot een contradictie leidt. In fig. 3 zou

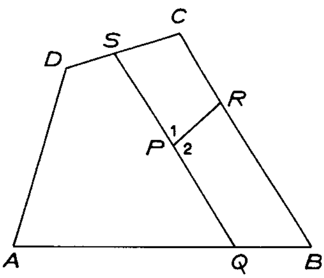


Fig. 3

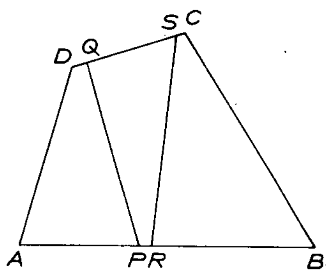


Fig. 4

$$\angle P_1 = \angle A \text{ en } \angle P_2 = \angle D$$

moeten zijn, hetgeen eveneens tot een contradictie leidt. In fig. 4 wordt aan de eis voldaan, als we ervoor zorgen, dat

$$PQ \,//\, BC \text{ en } RS \,//\, AD.$$

Mochten echter de lijnen l_1 en l_2, evenwijdig resp. aan BC en AD, elkaar niet buiten de vierhoek snijden en de lijnen m_1 en m_2, resp. evenwijdig aan CD en AB, evenmin, dan lukt de verdeling niet (fig. 5).

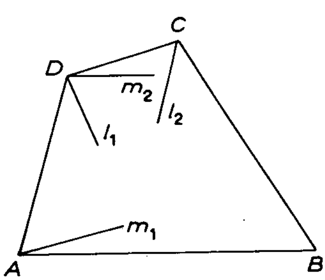


Fig. 5

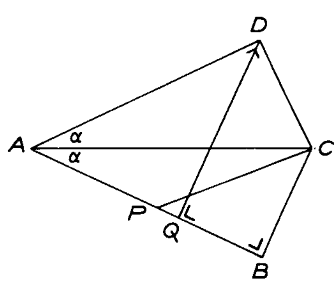


Fig. 6

In fig. 6 is een koordenvierhoek geconstrueerd, waarin dit inderdaad het geval is. Mocht men zijn ogen niet willen geloven, dan leert een eenvoudige berekening, dat de figuur nog zo gek niet is. Stel $AB = 1$. Dan is

$$AQ = \cos 2\alpha \quad \text{en} \quad BP = \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha}.$$

We kiezen nu α zo, dat

$$\cos 2\alpha + \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha} \geqslant 1.$$

Dit blijkt gelijkwaardig te zijn met

$$\cos^2\alpha \geqslant \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

En aan deze ongelijkheid kan voldaan worden.
$n = 2$. Was de stelling juist voor $n = 2$, dan was hij ook juist voor $n = 3$. Ook voor $n = 2$ geldt de stelling dus niet.
Wie de smaak te pakken heeft gekregen, kan nu nog bewijzen, dat het niet noodzakelijk was in de opgave van een koordenvierhoek uit te gaan. Men kan namelijk ook aantonen, dat voor $n \geqslant 4$ geldt: elke vierhoek kan in n koordenvierhoeken verdeeld worden.

285 De 2 000 000 000e machten van alle even natuurlijke getallen, die niet op een 0 eindigen, eindigen op dezelfde tien cijfers. Bewijs dit. Welke zijn deze tien cijfers?
Hieronder volgt een schets van de oplossing.
Met behulp van de binomiumformule van Newton vinden we

$$(10p + 2)^a = 2^a \pmod{10^{10}}, \text{ waarin } a = 2 \cdot 10^9 \text{ en } p \in \mathbb{N}$$

en analoge uitkomsten voor $(10p + 4)^a$, $(10p + 6)^a$ en $(10p + 8)^a$.
We behoeven dus alleen nog maar 2^a, 4^a, 6^a en 8^a te onderzoeken.
We onderzoeken eerst onder welke voorwaarde twee machten van 2 dezelfde laatste tien cijfers hebben. Dus: voor welke p en q is

$$2^{p+q} - 2^q = 0 \pmod{10^{10}}$$
$$2^q(2^p - 1) = 0 \pmod{10^{10}}?$$

Dit is gelijkwaardig met $q \geqslant 10$ en $2^p - 1$ deelbaar door 5^{10}.
Nu is

$2^4 - 1$ deelbaar door 5
$2^{20} - 1 = (2^4 - 1)(2^{16} + 2^{12} + 2^8 + 2^4 + 1)$ deelbaar door 5^2 enz.

en tenslotte

$2^4 . 5^9 - 1$ deelbaar door 5^{10}.

Dus:

$$2^q,\ 2^{q+4\cdot 5^9},\ 2^{q+2\cdot 4\cdot 5^9}, \ldots$$

eindigen op alle dezelfde tien cijfers, mits

$$q \geqslant 10.$$

Waaruit volgt, dat 2^a, 4^a en 8^a op dezelfde tien cijfers eindigen, omdat a deelbaar is door $4 \cdot 5^9$.

Om aan te tonen, dat ook 6^a op dezelfde tien cijfers eindigt, moeten we bewijzen, dat $3^a \equiv 1 \pmod{10^{10}}$. We vragen daarom voor welke p geldt $3^p - 1 \equiv 0 \pmod{10^{10}}$.

$3^4 - 1$ is deelbaar door $2^4 \cdot 5$

$3^{20} - 1 = (3^4 - 1)(3^{16} + 3^{12} + 3^8 + 3^4 + 1)$ is deelbaar door $2^4 \cdot 5^2$

enz.

en ten slotte

$3^{4 \cdot 5^9} - 1$ is deelbaar door $2^4\, 5^{10}$,

$3^{4 \cdot 5^9 \cdot 2^6} - 1$ is deelbaar door 10^{10}.

Omdat a deelbaar is door $4 \cdot 5^9 \cdot 2^6$ is $3^a - 1$ deelbaar door 10^{10} of $3^a \equiv 1 \pmod{10^{10}}$. Waarmede het bewijs voltooid is.

Nu nog de laatste tien cijfers vinden. Noem het getal, dat uit de laatste tien cijfers bestaat, x. We weten dan, dat

$1024x \equiv 1024 \pmod{10^{10}}$ (immers $1024 = 2^{10}$).

Hieruit volgt:

$x = 1 + y\, 5^{10}$.

Verder is een getal deelbaar door 1024 dan en alleen dan als het getal gevormd door de laatste tien cijfers door 1024 deelbaar is. Dus is

$x = z \cdot 1024$

Met enig geduld vindt men nu $y = 183$ (het rekenwerk wordt iets bekort als men eraan denkt, dat y een oneven getal kleiner dan 1024 is; $1 + 5^{10} \equiv 762 \pmod{1024}$, $1 + 3 \cdot 5^{10} \equiv 762 + 498 \pmod{1024}$ enz.).
De laatste tien cijfers blijken zo te zijn 1787109376.
De heer Kootstra schreef mij, dat het bedenken van deze opgave en uiteraard ook het oplossen ervan het resultaat was van drie dagen slecht weer in Spanje. Ten bate van de lezers van Euclides wens ik hem nog veel slecht weer toe!

Wiskundig Genootschap

Het **Wintersymposium** zal worden gehouden op zaterdag 6 januari 1973 in het gebouw van de Rijksscholengemeenschap, Lassuslaan 230 te Zwolle.
Als thema is gekozen **'Meetkunde'**.
Sprekers zijn o.a. Prof. Dr. J.C.H. Gerretsen-Groningen en Prof. Dr. J. Seidel-Eindhoven.
De eerste lezing vangt aan om 10.30 uur. De bijeenkomst wordt beëindigd om 15 uur.
Ontvangst (en koffie) van 10 uur af.
Ieder belangstellende is van harte welkom.
I.v.m. de te reserveren plaatsruimte wordt ieder, die aan deze bijeenkomst wenst deel te nemen, verzocht hiervan uiterlijk op 23 december a.s. bericht te zenden aan Drs. J. van Lint, Parkstraat 22, Zwolle en tevens te vermelden of hij aan de gemeenschappelijke lunch wenst deel te nemen. De kosten van de lunch bedragen *f* 6,00, welk bedrag gestort kan worden op postrekening 1001062 t.n.v. Drs. J. van Lint-Zwolle.

Degenen die per trein reizen kunnen de RSG bereiken van het station met bus lijn 3; uitstappen halte Bachlaan.

INHOUD